Institut des Sciences et des Techniques Appliquées
Département : Génie Biologie
Sciences Agro-alimentaires
Controle : Outils de Statistique
13/05/2026

Exercice 1 (03pt)

Soit X une variable aléatoire continue, et soit la fonction f défini sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & si\ x \geq 0. \\ 0 & si\ non. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité de la variable aleatoire X. 2,5
2. Déduire F la fonction de répartition associée à la densité f. 1
3. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(-1 < X < 2)\ ;\ P(1 < X < 3)\ ;\ P(X < 1)$$

0,5 0,5 0,5

Exercice 2 (15pt)

Dans une entreprise de fabrication des composants biologiques, 97% de la production est sans defauts et prete à utiliser.

(5pt) I. Les composants sont arrangés dans des packets de 10 composants. On vérifie un packet pour remplacer les composants défectueux et on note X la variable aléatoire qui modelise cette vérification.

(a) Quelle loi suit la v.a X ? 1,5

(b) Calculer son esperance mathématique, variance et écart type 1

(c) Quelle est la probabilité de remplacer 2 composants, 7 composants ? 1

(d) Quelle est la probabilité de remplacer tout les composants du packet ? 0,5

(e) Quelle est la probabilité qu'au plus 8 composants sont remplacés ? 1

II. Une boite contient 12 packets des composants. On doit vérifier tout les composants de la boite pour éliminer ceux qui sont défectueux ; Y la variable aléatoire qui modelise cette vérification.

(a) Quelle loi suit la v.a Y ? 0,5

(b) Peut on approximer la loi de la v.a Y par une autre loi ? laquelle et pourquoi ? 1,5

(c) Donner la nouvelle loi et ses moments. 1 + 1

(d) Quelle est la probabilité d'eliminer 4 composants, 10 composants ? 1

(e) Quelle est la probabilité de garder tout les composants de la boite ? 0,5

III. Avant lancer la vente, les composants sont tetser un par un indépendament. Soit Z la variable aléatoire discrète qui modélise le processus des tests jusau'a l'obtintion d'un composant défectueux.

(a) Donner la loi de probabilité suivie par la v.a.d Z. 1

(b) Calculer son esperance mathématique, variance et écart type. 1

(c) Quelle est la probabilité que le 5^{em} composant soit défectueux ? 0,5

(d) Quelle est la probabilité qu'au moins 3 composants non défectueux soient tester avant obtenir le premier composant défectueux ? 1

(e) Quelle est la proba qu'on doit refaire le test entre 2 et 5 fois pour obtenir le premier composant défectueux ? 1

Corrigé type - Examen 2ème semestre Agro 1ère année

Outils statistique

Exo 1: X une variable aléatoire continue; f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{si non.} \end{cases}$$

1) Montrons que f est une densité de proba:

a) Les fonctions $x \mapsto xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}^+$ et $x \mapsto 0$; $x < 0$ sont continues sur leurs domaines de définition. (0,5)

$\Rightarrow$ f est continue P.P.

b) On a: $\forall x \geq 0 : xe^{-x} > 0$

et $\forall x < 0 : 0 \leq 0$ (0,5)

d'ou la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \boxed{0}$ (0,5)

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 0 = \boxed{0}$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx} + \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

$= \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

$u = x \qquad u' = 1$

$v' = e^{-x} \qquad v = -e^{-x}$

$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

$= [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^{+\infty}$

$= \lim_{x \to +\infty} (-xe^{-x} - e^{-x}) - (-1)$

$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1}$ (1)

De a, b, c et d; f est une densité de probabilité de la v.a.c. X.

2) La fonction de répartition F:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$x < 0$:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt = 0.$ (0,25)

$x \geq 0$:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x te^{-t}\,dt.$

$= \int_0^x te^{-t}\,dt$

$= -[+xe^{-x} + e^{-x}]_0^x.$

$= -(xe^{-x} + e^{-x} - 1)$

$F(x) = 1 - e^{-x}(x+1).$ (0,5)

d'ou:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 - e^{-x}(x+1) & ; x \geq 0. \end{cases}}$$ (0,25)

3) Calcul des probabilités:

- $P(-1 < X < 2) = P(-1 < X < 0) + P(0 < X < 2)$
  $= 0 + F(2) - F(0)$
  $= 1 - 3e^{-2} - 1 + 1$
  $\boxed{P(-1 < X < 2) = 1 - 3e^{-2} = 0,59}$ (0,5)
- $P(1 < X < 3) = F(3) - F(1).$
  $= 1 - 4e^{-3} - 1 + 2e^{-1}$
  $\boxed{= 2e^{-1} - 4e^{-3} = 0,53}$ (0,5)
- $P(X < 1) = F(1)$
  $\boxed{= 1 - 2e^{-1} = 0,26}$ (0,5)

Exo 2: Dans tout l'exercice on a $p = 0,03$.

1)

a) X suit une loi binomiale de par $n = 10$ et $p = 0,03$.

$X \sim B(0,03\,;\,10)$. (1,5)

$X = \{0;1;2;\dots;10\}$.

$P(X=k) = C_{10}^{k}(0,03)^{k}(0,97)^{10-k}$

b) Espérance, variance et écart-type.

$E(X) = np = 10\times 0,03 = \boxed{0,3}$

$V(X) = npq = 10\times 0,03\times 0,97 = \boxed{0,291}$ (1)

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{29,1} = \boxed{5,39\times 10^{-2}}$.

c) Calcul des probas

$P(X=2) = C_{10}^{2}(0,03)^{2}(0,97)^{8}$
$= \boxed{0,0317}$ (0,5)

$P(X=7) = C_{10}^{7}(0,03)^{7}(0,97)^{3}$
$= \boxed{2,39\times 10^{-9}}$ (0,5)

d) La proba de remplacer tout les composants

$P(X=10) = p^{10} = \boxed{5,9\times 10^{-16}}$. (0,5)

e) La proba qu'au plus 8 composants sont remplacer $(X \leq 8)$

$P(X\leq 8) = \sum_{k=0}^{8} C_{10}^{k}(0,03)^{k}(0,97)^{10-k}$

$= 1 - P(X>8)$

$= 1 - [P(X=9)+P(X=10)]$

$= 1 - C_{10}^{9}(0,03)^{9}(0,97) - (0,03)^{10}$

$= 1 - 1,91\times 10^{-13}$.

$\simeq 1$. (1)

II) Une boite de 12 paquets de 10 composants

1) donc on a $n = 12\times 10 = 120$.

a) Y suit une loi binomiale de par $n = 120$, $p = 0,03$. (0,5)

$Y \sim B(0,03\,;\,120)$.

b) Comme les paramètres de la loi bin vérifie les conditions d'approximation (0,5) $(n = 120 > 30\,;\ p = 0,03 < 0,1)$ (0,5) donc on peut par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n\times p$. (0,5)

On aura donc :

$\cancel{Y \sim P(n\times p)}$ $Y \sim P(\lambda = n\times p)$.

c) $Y \sim P(3,6)$ (0,25)

$Y = \{0;1;2;\dots;12\}$ (0,25)

$P(X=k) = \frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda} = \frac{(3,6)^{k}}{k!}e^{-3,6}$ (0,5)

Les moments :

$E(X) = V(X) = \lambda = \boxed{3,6}$ (1)

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3,6} = \boxed{0,6}$.

d) Calcul des probas.

$P(X=4) = \frac{(3,6)^{4}}{4!}e^{-4} = \boxed{0,128}$ (1)

$P(X=10) = \frac{(3,6)^{10}}{10!}e^{-10} = \boxed{4,557\times 10^{-6}}$.

e) La proba de garder tout les composants :

$P(X=0) = \frac{(3,6)^{0}}{0!}e^{-3,6} = e^{-3,6}$
$= \boxed{0,027}$ (0,5)

III) a) - On vérifie les comparaisons un par un :

Z suit une loi géométrique de paramètre $p = 0,03$.

$Z \sim G(0,03)$ 0,25

$X = \{1, 2, \dots, +\infty\}$ (0,25)

$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$

$P(Z = k) = (0,03)(0,97)^{k-1}$ 0,5

b) - Espérance, Var et écart-type :

$E(Z) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,03} = \frac{100}{3} = \boxed{33,33}$

$V(Z) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0,97}{(0,03)^2} = \frac{9700}{9}$ 1

$= \boxed{1077,777}$

$\delta(Z) = \sqrt{V(Z)} = \boxed{32,829}$.

c) Calcul de Probas :

$P(Z = 5) = (0,03)(0,97)^4 = 0,0265$ 0,5

d) - $Z \geq 4$:

$P(Z \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$

$= 1 - [P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)]$ 1

$= \boxed{0,969}$

e) - Z entre 2 et 5 :

$2 \leq Z \leq 5$.

$P(2 \leq Z \leq 5) = P(Z = 2) + P(Z = 3) + P(Z = 4) + P(Z = 5)$.

1

$= (0,03)(0,97 + (0,97)^2 + (0,97)^3 + (0,97)^4)$

$= \boxed{0,11}$

ISTA - Ain Mlila
Univ OEB _ 26/04/2022

12/12

Interrogation 2ème Semestre
Outils de Statistique :

Exercice :

Une usine fabrique des produits alimentaires dont 98% sont prêts à vendre.

I)- Pour lancer la vente des produits ; on mait les produits sont contrôlés, comme suit : Les produits sont dans des boîtes de 15 pièces et on les vérifies pour éliminer ceux qui ne sont pas prês à la vente. X la variable aléatoire qui modélise cette vérification.

1)- Quelle loi suit la variable aléatoire X ? (2)

2)- Calculer les probabilité des événements suivants :

A)- Eliminer 3 produits de la boîte. (1)

B)- Eliminer au plus 4 produit de la boîte (1,5)

C)- Garder tout les produit et les vendre. (1)

3)- Donner les moments de la v.a. X (1,5)

II)- A la fin de la journée ; un total de 1000 produit est fabriqué. On contrôle produit par produit pour éliminer ceux qui ne sont pas valable à la vente. On modélise ce contrôle par la v.a Y.

1)- Quelle loi suit la va Y ? (2)

2)- Quelle est la probabilité que le 5ème produit soit éliminer. ? (1)

3)- Quelle est la probabilité que le 1er produit éliminer soit entre le 10ème et le 15ème élément contrôlé ? (1,5)

4)- Donner les moments de la v.a. Y (1,5)

- Bon Courage - -