

EXERCICE 1 :

Soit f la fonction réelle définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x - \sqrt{1 - x^2}$$

- 1) Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .
- 2) Etudier les variations de la fonction f sur D_f .

EXERCICE 2 :

Soit le système linéaire (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2x + 2z = 0 \\ x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

- 1) Donner la forme matricielle de (S).
- 2) Résoudre le système (S) si c'est possible.

EXERCICE 3 :

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Vérifier que le polynôme caractéristique de la matrice A est donné comme suit :

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 10\lambda - 8. \text{ (Sachant que } P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \text{)}$$

- 2) Déterminer λ_i les valeurs propres de la matrice A .

(les λ_i sont les solutions de l'équation $P_A(\lambda) = 0$).

- 3) Déterminer V_i les vecteurs propres de la matrice A .

$$(A - \lambda_i I)V_i = 0_{3 \times 1}; V_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; 0_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 4) Déterminer les matrices P et D telles que $A = PDP^{-1}$.

Courgé-type Exercices des Maths

Exercice 1:

Soit la fonction f définie sur D_f

$$f(x) = 2x - \sqrt{1-x^2}$$

1) Déterminer le domaine de définition D_f .

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}; 1-x^2 \geq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}; 1 \geq x^2\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 1\}$$

$$D_f = [-1; 1]$$

2) Variation de f sur D_f .

$$\forall x \in D_f:$$

$$f'(x) = 2 - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1-x^2} + x}{\sqrt{1-x^2}}$$

pour $x \in [0; 1]$: $2\sqrt{1-x^2} + x \geq 0$
donc f est croissante sur $[0; 1]$
et pour $x \in [-1; 0]$ on va étudier le
signe de

$$2\sqrt{1-x^2} + x = 0$$

$$2\sqrt{1-x^2} = -x$$

$$(2\sqrt{1-x^2})^2 = (-x)^2$$

$$4 - 4x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

x	-1	$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$	0
$f'(x)$	-	0	+

f est décroissante sur $[-1; -\frac{2\sqrt{5}}{5}]$ et croissante sur $[-\frac{2\sqrt{5}}{5}; 0]$

Table de Variation:

x	-1	$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$	0	1
$f'(x)$	-	0	+	
$f(x)$	-2			

Exercice 2:

$$(S) \begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2x + 2z = 0 \\ x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

1) Forme matricielle de (S)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

2) Résolution du système (S)

$$\det(A) = 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \quad (2)$$

$$AX = b \Leftrightarrow X = A^{-1}b$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & 8 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Exercice 03:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Polynôme caractéristique de A:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(-2-\lambda)(1-\lambda) - 2(3(1-\lambda) - 6) - 1(6 - 4)$$

$$= -\lambda(\lambda^2 + \lambda - 2) - 6 + 6\lambda - 6 + 4 + 2\lambda$$

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda - 8 \quad (2)$$

2) Les valeurs propres de la matrice A:

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda - 8 = 0$$

$$\lambda_1 = -4 \quad ; \quad \lambda_2 = 1 \quad ; \quad \lambda_3 = 2$$

(1,5)

3) Les vecteurs propres de la matrice A:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \text{ car } (A - \lambda_1 I) \underline{v}_1 = 0$$

$$(A + 4I) \underline{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \dots (1) \\ 3x + 2y = 0 \dots (2) \\ -2x + 2y + 5z = 0 \dots (3) \end{cases}$$

$$(3) - (2) \Leftrightarrow -5x + 5z = 0 \Rightarrow x = z$$

$$(1) \Rightarrow 4x + 2y - x = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}y = z$$

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y \\ y \\ -\frac{2}{3}y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (1,5)$$

$$\underline{v}_2: (A - \lambda_2 I) \underline{v}_2 = 0$$

$$\begin{cases} -1x + 2y - 1z = 0 \Rightarrow -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow y = z \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1,5)$$

$$\underline{v}_3: (A - \lambda_3 I) \underline{v}_3 = 0$$

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \Rightarrow 3x = 4y \Rightarrow y = \frac{3}{4}x \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$-2x + 2(\frac{3}{4}x) - z = 0$$

$$(-2 + \frac{3}{2})x - z = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}x$$

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{4}x \\ -\frac{1}{2}x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (1,5)$$

4) Les matrices P et D:

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$