التصحيح النموذجي بإمتحان
الدورة العادية هندسة رياضيات

التمرين الأول:

① الإقتراح (ج).
نفرض أن (u_n) المتتالية ثابتة يعني $u_0 = \alpha$ حيث $(\alpha \in \mathbb{R})$
أي: $\alpha = u_0 = u_1 = \dots = u_n = u_{n+1}$
ومنه: $\alpha = \frac{2}{3}\alpha - 2$
$\alpha - \frac{2}{3}\alpha = -2$
$\frac{1}{3}\alpha = -2$
$\boxed{\alpha = -6}$

② الإقتراح (ب).
ومنه: $u_0 = 6$
لدينا: $S_n = C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1}$
ومنه: $S_n + C_n^0 + C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n$
$S_n + 1 + 1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1)^{n-k} (1)^k$
$S_n + 2 = (1+1)^n$
وعليه: $\boxed{S_n = 2^n - 2}$

③ لدينا:
$\left(2x^2 + \frac{3}{x}\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} C_2^k (2x^2)^{2-k} \left(\frac{3}{x}\right)^k$
$= \sum_{k=0}^{n} C_2^k (2)^{2-k} (3)^k (x)^{4-2k} (x)^{-k}$
$= \sum_{k=0}^{n} C_2^k (2)^{2-k} (3)^k (x)^{4-3k}$

④ الإقتراح (د).
$D_g =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.
من أجل كل $x \in D_g$: $-x \in D_g$
$g(-x) = -x \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = -x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
$= -x\left[-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]$
$= +x \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = g(x)$
$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$
إذن g زوجية.

التمرين الثالث:

بداية سنة 2015 ← وضع مبلغ قدره 50000DA ← يقدم صندوق فائدة بسعر هذا الشخص 5000DA بعد حساب الفوائد. 5% سنويا.

u_n المبلغ الموجود في حساب الشخص بداية سنة $2015+n$

1) أ- حساب u_0 ، u_1 ، u_2.

$u_0 = 50000$ DA (0,5)

$u_1 = 50000 + \frac{5}{100}(50000) - 5000$ (المبلغ، الفائدة، ما سحب)

$u_1 = 47500$ DA (0,5)

$u_2 = 47500 + \frac{5}{100}(47500) - 5000$

$u_2 = 44875$ (0,5)

ب- هل المتتالية (u_n) حسابية ؟ هندسية ؟.

لدينا: $2u_1 = 95000$ DA

$u_0 + u_2 = 94875$ DA (0,75)

إذن: $u_0 + u_2 \neq 2u_1$ ← المتتالية (u_n) ليست حسابية

لدينا: $u_1^2 = 2256250000$

$u_0 \times u_2 = 2243750000$ (0,75)

إذن: $u_0 \times u_2 \neq u_1^2$ ← المتتالية (u_n) ليست هندسية

2) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 1,05u_n - 5000$

لدينا: $u_1 = 1,05u_0 - 5000 \Leftarrow u_1 = u_0 + 0,05u_0 - 5000$

$u_2 = 1,05u_1 - 5000 \Leftarrow u_2 = u_1 + 0,05u_1 - 5000$

(1)

بصفة عامة: $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 1,05u_n - 5000$

3) نضع: $v_n = u_n - 100000$.

أ- اثبات أن (v_n) هندسية يطلب أساسها وحدها الأول.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 100000$

$= 1,05u_n - 5000 - 100000$

$= 1,05u_n - 105000$

$= 1,05(u_n - 100000)$ (1)

$= 1,05v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1,05$ وحدها الأول

$v_0 = u_0 - 100000 = -50000$

احسب النهاية التالية: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\dots}{(x)^{\dots}}$ عن متتالية (x)

بالتوفيق

ب- V_n بدلالة n:

$V_n = V_0 \times q^n$

$V_n = -50000\,(1{,}05)^n$

* استنتاج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_n = -50000\,(1{,}05)^n + 100000$

لدينا: $V_n = U_n - 100000$

إذن: $U_n = V_n + 100000$

$U_n = -50000\,(1{,}05)^n + 100000$ (1)

ج- المبلغ الموجود في حساب هذا الشخص نهاية سنة 2022

لدينا: $n = 2022 - 2015$

$= 7$.

إذن المبلغ الموجود في حساب هذا الشخص هو:

$U_7 = -50000\,(1{,}05)^7 + 100000$

$\simeq 29644{,}97887$

$U_7 \simeq 29645$ DA (1)

التمرين الرابع:

* حساب النهاية:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$

لدينا: $\dfrac{(x+1)^x}{x^{x+1}} = \dfrac{(x+1)^x}{x^x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x = \dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ (1)

بوضع: $t = \dfrac{1}{x}$. ومنه: $x = \dfrac{1}{t}$.

$x \to +\infty$ و $t \to 0$ فإن

إذن:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

$= \lim\limits_{t \to 0} t\,(1+t)^{\frac{1}{t}}$

$= \boxed{0}$

$\begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} t = \boxed{0} \\ \lim\limits_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t \to 0} e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} \end{cases}$

$= \lim\limits_{t \to 0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \boxed{e}$

* مشتقة الدالة:

$g(x) = x\left(\dfrac{1}{x}\right)^x = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{x-1}$

$= e^{(x-1)\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{(1-x)\ln x}$ (1)

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$: $g'(x) = \left((1-x)\ln x\right)' \left(\dfrac{1}{x}\right)^{x-1}$.

$= \left(-\ln x + \dfrac{1-x}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)^{x-1} = \dfrac{-x+1-x\ln x}{x}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{x-1}$.

التمرين ④ :

① تبسيط العلاقة :

$$\frac{((n+1)!_0)^2}{(n)!_0(n-1)!_0} = \frac{(n+1)!_0 \times (n+1)!_0}{n! \times (n-1)!_0}$$

$$= \frac{(n+1)\,n!_0 \times (n+1) \times n \times (n-1)!_0}{n! \times (n-1)!_0}$$

$$= n(n+1)^2$$

$$= n^3 + 2n^2 + n.$$

② حل في IN المعادلة :

لدينا : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$: أي

المعادلة تكتب على الشكل : $C_{n-2}^{4} + C_{n-2}^{5} = C_{n-1}^{5}$

$n-1 > 4$ أي $C_{n-1}^{5} = C_{n-1}^{11}$: وبما أن $C_{n-2}^{5} + C_{n-2}^{4} = C_{n-1}^{11}$

$$\frac{(n-1)!_0}{(n-1-5)!_0\,5!_0} = \frac{(n-1)!_0}{(n-1-11)!_0\,11!_0}$$

أي :

$$\frac{(n-12)!_0}{(n-6)!_0} = \frac{5!_0}{11!_0}$$

إذن :

$$\boxed{n = 17}$$

منه :

③ ننشر العبارة باستعمال دستور ثنائي الحد :

$$(2x-3)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k (2x)^{5-k} (-3)^k$$

$$= C_5^0 (2x)^5 (-3)^0 + C_5^1 (2x)^4 (-3)^1 + C_5^2 (2x)^3 (-3)^2 + C_5^3 (2x)^2 (-3)^3 + C_5^4 (2x)^1 (-3)^4 + C_5^5 (2x)^0 (-3)^5$$

$$\boxed{(2x-3)^5 = 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 + 810x - 243}$$

جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي –
معهد التكنولوجيا

السنة الجامعية: 2025-2026
قسم تسيير المؤسسات والإدارات

إمتحان الدورة العادية في مقياس الرياضيات

التمرين الأول: (4 نقط)

حدد الإجابة الصحيحة الوحيدة المقترحة من بين الإجابات في كل حالة، مع التبرير

1) تكون المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة التراجعية: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-2$، $\forall n\in\mathbb{N}$، ثابتة من أجل:

أ- $u_0=1$ ب- $u_0=-1$ ج- $u_0=-6$

2) $\forall n\in\mathbb{N}$، المجموع $S_n=C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^{n-1}$، يساوي:

أ- $S_n=2^n$ ب- $S_n=2^n-2$ ج- $S_n=3^n+1$

3) في منشور ثنائي الحد $\left(2x^2+\frac{3}{x}\right)^2$ معامل الحد الذي درجته 3 هي:

أ- 2026 ب- 2160 ج- 5460

4) الدالة g المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

أ- زوجية ب- فردية ج- لا زوجية لا فردية

التمرين الثاني: (5 نقط)

1. بسط العلاقات التالية: $\frac{((n+1)!)^2}{(n!)\times(n-1)!}$
2. حل في $\mathbb{N}$ المعادلة التالية: $C_{n-2}^5+C_{n-2}^4=C_{n-1}^{11}$
3. باستعمال دستور ثنائي الحد أنشر مايلي: $(2x-3)^5$

التمرين الثالث: (8 نقط)

في بداية جانفي 2015 وضع شخص مبلغا من المال قدره $5000DA$ في صندوق التوفير والاحتياط، يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا. يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره $5000DA$ بعد حساب الفوائد

يرمز u_n الى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $n+2015$.

1) أ- أحسب كلا من u_0، u_1 و u_2.

ب- هل المتتالية (u_n) حسابية؟ هندسية؟ برر اجابتك.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1.05u_n-5000$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-100000$

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=-5000(1.05)^n+100000$

ج- حدد المبلغ الموجود في حساب هذا الشخص نهاية سنة 2022.

التمرين الرابع: (3 نقط)

احسب النهاية التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^x}{(x)^{x+1}}$، عين مشتقة الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x\left(\frac{1}{x}\right)^x$

بالتوفيق