

Corrigé

Exercice 103 (6 pts)

$$Z^3 - iZ + 1 - i = 0 \quad (E)$$

1) On a: pour $Z_1 = -i$: $(-1)^3 - i(-1) + 1 - i$
 $= -1 + i + 1 - i = 0$

donc : l'équation (E) admet une racine $Z_1 = -1$

2) On a: $(Z - Z_1)(Z^2 + aZ + b) = (Z + 1)(Z^2 + aZ + b)$
 $= Z^3 + aZ^2 + bZ + Z^2 + aZ + b$
 $= Z^3 + (a+1)Z^2 + (a+b)Z + b$

Par identif avec (E) on obtient :

$$\begin{cases} a+1=0 \\ a+b=-i \\ b=1-i \end{cases}$$

alors : $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1-i \end{cases}$

donc :

$$Z^3 - iZ + 1 - i = (Z + 1)(Z^2 - Z + 1 - i)$$

3) $Z^3 - iZ + 1 - i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z + 1 = 0 \\ Z^2 - Z + 1 - i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 = -1 \\ Z^2 - Z + 1 - i = 0 \end{cases}$

et $Z^2 - Z + 1 - i = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1-i) = -3 + 4i$$

type "Controlle"

on cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tq:

$$(x + yi)^2 = -3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & \text{--- (1)} \\ 2xy = 4 & \text{--- (2)} \\ x^2 + y^2 = 5 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{to } |(x+yi)^2| &= |-3+4i| \\ (\sqrt{x^2+y^2})^2 &= \sqrt{(-3)^2+4^2} \\ \boxed{x^2+y^2=5} & \text{--- (3)} \end{aligned}$$

alors (1) + (3): $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$
 $\boxed{x_2 = -1}$

Pour $x_1 = 1 \Rightarrow 2(1)y = 4 \Leftrightarrow \boxed{y_1 = 2}$

$x_2 = -1 \Rightarrow 2(-1)y = 4 \Leftrightarrow \boxed{y_2 = -2}$

d'où: $D = (x_1 + yi)^2 = (1 + 2i)^2 \vee D = (-1 - 2i)^2$

Pour $D = (1 + 2i)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 2(1+2i)}{2} = \boxed{-i} \\ z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 2(1+2i)}{2} = \boxed{1+i} \end{cases}$

Pour $D = (-1 - 2i)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1 - (-1 - 2i)}{2} = \boxed{1+i} \\ z_2 = \frac{1 + (-1 - 2i)}{2} = \boxed{-i} \end{cases}$

d'où: $S = \{ z_1 = -i, z_2 = -i, z_3 = 1+i \}$

Exercice 2) 3 (6 pts)

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx \quad \text{de la forme } \int \frac{u'}{u} = \ln|u|$$

$$= \left[\ln|e^x + 1| \right]_0^{\ln 2} = \ln|e^{\ln 2} + 1| - \ln|e^0 + 1|$$

$$= \ln 3 - \ln 2 = \boxed{\ln \frac{3}{2}}$$

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+4}} dx \quad \text{de la forme } \int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$$

$$= \left[2\sqrt{x^2+3x+4} \right]_0^1 = 2(\sqrt{1^2+3 \cdot 1+4} - \sqrt{4})$$

$$= 2(2\sqrt{2} - 2) = \boxed{4(\sqrt{2} - 1)}$$

$$\int_1^e \frac{\ln^3(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} (\ln x)^3 dx \quad \text{de la forme } \int \frac{u^n}{u} = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$= \left[\frac{1}{4} \ln^4 x \right]_1^e = \frac{1}{4} (\ln^4 e - \ln^4 1)$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}}$$

Exercice 3) B (4 pts)

$$y' + 4y = (x - 2) \dots e^{-2x}$$

1) l'éq homogène associée : $y' + 4y = 0$

$$y' = -4y \quad \frac{1}{y} y' = -4$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -4 dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -4x + C \Rightarrow |y| = e^{-4x+C}$$

$$\Rightarrow y = \pm e^C e^{-4x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{G.H.}(x) = K e^{-4x}} \quad (K \in \mathbb{R})$$

2) la solution de (1) :

cherchons une solution particulière de l'éq(1) :

Par la méthode de variation des constantes :

$$\text{on pose : } y_p(x) = K(x) e^{-4x}$$

$$\Rightarrow y_p'(x) = K'(x) e^{-4x} - 4K(x) e^{-4x}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où (1)} \Rightarrow K'(x) e^{-4x} - 4K(x) e^{-4x} + 4K(x) e^{-4x} &= (x - 2) e^{-2x} \\ &= (x - 2) e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K'(x) = \frac{(x - 2) e^{-2x}}{e^{-4x}}$$

$$K'(x) = (x - 2) e^{2x}$$

$$K(x) = \int (x - 2) e^{2x} dx$$

• Intégration par partie:

$$\text{on pose } \begin{cases} u(x) = (x - 2) \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{2x} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\text{alors: } K(x) = \frac{(x-2)^2}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$= \left[\frac{(x-2)^2}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right]$$

$$K(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{5}{2} \right)$$

$$\text{donc: } y_p(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{5}{2} \right) e^{-4x}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2x} \left(x - \frac{5}{2} \right)$$

$$\text{alors: } y_G(x) = y_p(x) + y_H(x)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2x} \left(x - \frac{5}{2} \right) + k e^{-4x}$$

Q. 21(4)

$$\begin{aligned} & \cos\left(20 \cdot 25\pi + x\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(-x) - \cos\left(\frac{17\pi}{2} + x\right) \\ &= \cos(\pi + x) + \cos x + \sin x - \cos\left(8\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) \\ &= -\cos x + \cos x + \sin x + \sin x = \boxed{2 \sin x} \end{aligned}$$