

Institut des Sciences et des Techniques Appliquées
Département : Génie Biologie - Sciences Agro-alimentaires
Contrôle : Base des maths

Exercice 1 (08 pts)

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & a & -2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer les valeurs de a pour que A ne soit pas inversible.
2. Prenons $a = 1$; calculer $\text{Det}(A)$, que peut on conclure ?
3. Calculer A^{-1} l'inverse de la matrice A .
4. Résoudre le système matriciel suivant :

$$AX = b; \text{ ou } b = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (09 pts)

Soit la matrice $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ de la matrice A .
2. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de la matrice A .
3. A est elle diagonalisable ? si oui déterminer les matrices P et D .
4. Pour $A = PDP^{-1}$; calculer A^3 .

Exercice 3 (03 pts)

Soit les matrices $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Résoudre les équations suivantes de l'inconnu $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$; $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

1. $A - 3X = 2B$
2. $3X + 2B = 5X + AB$

Exo 1: $A = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & a & -2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

1) Les valeurs de a pour que A soit inversible?

$$\det(A) = -a(a^2) + a(-a)$$

$$= -a^3 - a^2 = -a^2(a+1)$$

A n'est pas inversible $\det(A) = 0$

$$-a^2(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

2) $a = 1$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = -1^2(1+1) = -2$$

$\Rightarrow A$ est inversible.

3) Calcul de A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}^t(A)$$

$$= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t$$

$$= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}^t$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(4)

4) Résolution du système $AX = b$.

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

B) $AX = b \Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = 1 \dots (1) \\ y - 2z = -5 \dots (2) \\ x + z = 3 \dots (3) \end{cases}$

$$(1) + (3) \Rightarrow 2z = 4 \Rightarrow \boxed{z = 2}$$

$$x = 3 - z = 3 - 1 = \boxed{2}$$

$$y = -5 + 2z = -5 + 4 = \boxed{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exo 2: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1) Polynôme caractéristique de A :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)[(4-\lambda)(3-\lambda)] - 1[(4-\lambda)(-1)]$$

$$= (4-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1]$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$$

$$= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 32\lambda + 32$$

(2)

2) Les valeurs et les vecteurs propres

→ Les valeurs propres:

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 32\lambda + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 4; \lambda_2 = 2. \quad (2)$$

→ Les vecteurs propres:

$$(A - \lambda I) \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$*(A - 4I) \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x - z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -z$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$*(A - 2I) \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - z = 0 \Rightarrow x = z \\ 2x + 2y + 2z = 0 \Rightarrow 2z + 2y + 2z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y = -4z \Rightarrow y = -2z$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

(2).

3) La matrice A est diagonalisable

$$\text{et } P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$4) A = P D P^{-1} \Rightarrow A^3 = P D^3 P^{-1} \times P D P^{-1} \times P D P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^3 = P D^3 P^{-1} \quad (0,5)$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -64 & 0 & 8 \\ 0 & 64 & -16 \\ 64 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 36 & 0 & -28 \\ 56 & 64 & 56 \\ -28 & 0 & 36 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ 12 & 16 & 12 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 0 & -28 \\ 56 & 64 & 56 \\ -28 & 0 & 36 \end{pmatrix}$$

Exo 3.

Resolution des equations.

1) $A - 3X = 2B$.

$$X = \frac{1}{3}(A - 2B) \quad (0,5)$$

$$= \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \right] \quad (0,5)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

2) $3X + 2B = 5X + AB$.

$$X = \frac{1}{2}(2B - AB) \quad (0,5)$$

$$= \frac{1}{2} \left[2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 4 & 24 \end{pmatrix} \right] \quad (0,5)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ -4 & -16 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$