الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Examen Mathématique pour les sciences d'ingénieurs

Spécialité : 3^{eme} année TI et MCPC — *Duré : 1h30 min ; Date : 18/01/2024*

Exercice N01 : 12 points

Soit les matrices suivantes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Donné le Rang de matrice D suivant les valeurs de m en $\mathbb{R}$? 3 points
2. Montre que $AB = BA$, puis B^2 et B^{-1}. En montrons la relation entre B^2 et B^{-1} *et I* 1 point
3. Calculer $C^2 + 2C - 3I$? puis déduire que $C(C + 2I) = 3I$ 2 point
4. Asque C est inversible ? si oui déduire sont inverse. 2 point
5. Soit la matrice K défini comme suivantes

$$K = A + 2I + 3B$$

6.1 Calculer K et K^2 0,5 point

6.2 Déduire que $A^2 + A + 6AB + 3B + 7I = 0$ en utilisant la relation entre K et K^2 2,5 point

6.3 Trouver la relation entre K^n et K 1 point

Exercice N02 : 8 points

Soit le système suivant : $S_1 \begin{cases} 5x + 2y - z = 6 \\ x + 6y - 3z = 4 \\ 2x + y + 4z = 7 \end{cases}$

1. A l'aide de méthode de Jacobi et a partir les valeurs de start $X^0 = (0; 0; 0)$, Résoudre le système e calculons les 3 premiers itérations seulement. 4 points

Soit le système suivant : $S_2 \begin{cases} y + 3z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases};$

2. Résoudre le système par la méthode de Gauss. 4 points

Examen Mathématique pour les sciences d'ingénieurs

Spécialité : 3^{eme} année TI et MCPC *Duré : 1h30 min ; Date : 18/01/2024*

Exercice N01 : 12 points

Soit les matrices suivantes

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\ 1 & -4 & 1\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix};\ D=\begin{bmatrix}m & 1 & 1\\ 1 & m & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

1. Donné le Rang de matrice D suivant les valeurs de m en •$\mathbb{R}$? 3 points
2. Montre que $AB=BA$, puis B^2 et B^{-1}. En montrons la relation entre B^2 et B^{-1} *et I* 1 point
3. Calculer $C^2+2C-3I$? puis déduire que $C(C+2I)=3I$ 2 point
4. Asque C est inversible ? si oui déduire sont inverse. 2 point
5. Soit la matrice K défini comme suivantes

$$K = A + 2I + 3B$$

6.1 Calculer K et K^2 0,5 point

6.2 Déduire que $A^2+A+6AB+3B+7I=0$ en utilisant la relation entre K et K^2 2,5 point

6.3 Trouver la relation entre K^n et K 1 point

Exercice N02 : 8 points

Soit le système suivant : $S_1\begin{cases}5x+2y-z=6\\ x+6y-3z=4\\ 2x+y+4z=7\end{cases}$

1. A l'aide de méthode de Jacobi et a partir les valeurs de start $X^0=(0;0;0)$, Résoudre le système e calculons les 3 premiers itérations seulement. 4 points

Soit le système suivant : $S_2\begin{cases}y+3z=3\\ 2x+y-z=1\\ x+y+z=2\end{cases};$

2. Résoudre le système par la méthode de Gauss. 4 points

Le Corrégé type d'examen math pour les ing

Exo N°1

1/ détermination du rang de matrice D en fonction de m :

Pour trouver le rang de D il faux de faire des changement elementaire sur D et transformé les valeur sous le diagonal à 0 Alor

$$D=\begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - mR_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 1-m & 1-m \end{bmatrix}$$

1,5

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-m \end{bmatrix}$$

1,5

$\boxed{\text{Alor } D \text{ est de Rang } 3 \text{ si } m \neq 1 \text{ et } m \neq 2}$

2/ on montre que $AB = BA$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

0,25

Donc $AB = BA$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

0,25

* La Relation entre B^2 et B^{-1} et I :

on a $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ 0,25

Alor $B^2 = I$ et $B = B^{-1}$ A cause de $B.B^{-1} = I$ 0,25

3/ on Calculer $C^2 + 2C - 3I$

$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ 0,25

Alor $C^2 + 2C - 3I$ egale a

0,25

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Donc } C^2 + 2C - 3I = 0_3}$

* on deduire que $C(C+2I) = 3I$

on a deja pouver que $C^2 + 2C - 3I = 0_3$

donc $C^2 + 2C = 3I \longrightarrow \boxed{C(C+2I) = 3I}$

1,5

4/ Asque C est inversible ?

oui C est inversible Car par la Reation qui dit $\boxed{AX = I}$ Par l'utilisation du Relation presidant la matrice X ixiste

on a $C(C+2I) = 3I$

Alor $C \frac{1}{3}(C+2I) = I$

Alor $CX = I$ Avec

$X = \frac{1}{3}(C+2I)$

donc en peut deduire inverse de C

$$\boxed{C^{-1} = X = \frac{1}{3}(C+2I)}$$ 1

1

5.1 Calculer K et K^2

on $K = A + 2I + 3B$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ 0,25

Alor $K^2 =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{K^2 = 3K}$$ 0,25

5,2 on deduire Que $A^2 + A + 6AB + 3B + 7I = 0$

on a $K^2 = 3K$ Alor $K^2 - 3K = 0$

on Remplace K par ça Relation on trouve

$$(A + 2I + 3B)^2 - 3(A + 2I + 3B) = 0$$

$$(A + 2I + 3B)(A + 2I + 3B) - 3(A + 2I + 3B) = 0$$

$$A^2 + 2A + 3AB + 2A + 4I + 6B + 3BA + 6B + 9B^2 - 3A - 6I - 9B = 0$$

Nous Avont deja montré Que

$$AB = BA$$
$$B^2 = I$$

2,5

Alor

$$\boxed{A^2 + A + 6AB + 3B + 7I = 0}$$

* La Relation entre K^n et K :

on a deja trouver que $K^2 = 3K$

Si on multiplie par K en deux Coté en trouve

$$K^3 = 3K^2 = 3(3K) = 3^2 K$$

Alor par recerence on a $K^2 = 3K$ si $k = 2$

$K^3 = 3^2 K$ si $k = 3$

Alor pour n La Relation

$$\boxed{K^n = 3^{n-1} K}$$

2

EXONo2

1/ La Resurdre du systeme S_1 par methode de jacobi:

on a $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ * il faux que A soit une matrice a diagonal strictement dominant

$|a_{ij}| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$

$|5| \overset{?}{\geqslant} |2| + |-1|$ oui ✓
$|6| \overset{?}{\geqslant} |1| + |-3|$ oui ✓
$|4| \overset{?}{\geqslant} |2| + |1|$ oui ✓

Alor A est a diagonal strictement dominant 0,5

$X^{k+1} = J X^k + C$ Avec $J = D^{-1} . N$, $C = D^{-1} . b$

$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$ 0,5

$N = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 0,5

Alor

$$J = D^{-1} \cdot N = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 & -1/5 \\ 1/6 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

0,5

$$C = D^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 \\ 4/6 \\ 7/4 \end{bmatrix}$$

0,5

Alor pour $k=0$ on a $X^1 = JX^0 + C$

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 & -1/5 \\ 1/6 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6/5 \\ 4/6 \\ 7/4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 \\ 4/6 \\ 7/4 \end{bmatrix}$$

0,5

Pour $k=1$

$$\begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 & -1/5 \\ 1/6 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6/5 \\ 4/6 \\ 7/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6/5 \\ 4/6 \\ 7/4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}0833 \\ -0{,}6751 \\ 0{,}7666 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6/5 \\ 4/6 \\ 7/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67/60 \\ -1/120 \\ 151/60 \end{bmatrix}$$

0,5

Pour $k=2$

$$\begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 & -1/5 \\ 1/6 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 67/60 \\ -1/120 \\ 151/60 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6/5 \\ 2/3 \\ 7/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -38/75 \\ -193/180 \\ 89/160 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6/5 \\ 2/3 \\ 7/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52/75 \\ -73/180 \\ 369/160 \end{bmatrix}$$

0,5

Alor $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ Apres 3 eterations sont

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 52/75 \\ -73/180 \\ 369/160 \end{bmatrix}$$

EXO N02

Parte 2

↳ Resoudre du systeme S_2 par elemination Gaussaine

$$\begin{cases} y+3z=3 \\ 2x+y-z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases} \xrightarrow{\text{La matrice augmenté}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

1

$$\xleftrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

1

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

0,5

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

0,5

Alor le systeme n'accepte pas une solution par la methode de gauss

1