Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Universitaire Larbi Ben M'Hidi d'Oum El-Bouaghi
Institut des Sciences et des Techniques Appliquées- Ain M'lila

Filière : techniques instrumentales

Année universitaire : 2023-2024

Semestre : 1

Examen : mesures vibratoire

Exercice 1 :

Partie 1- Le système de la **(figure 1-a)** montre une poulie de centre O,de moment d'inertie $j_{0,}$ composée de deux disques solidaires de rayons r_1=r et r_2= 2r. Au rayon r_1 est attaché un ressort de raideur k2,au rayon r_2 sont liés une masse m et un ressort de raideur k_1. Pour les données suivante k_1 = 1000 N /m, k_2 = 500N / m, m= 10 kg.r = 5cm , j_0 =1Kg.m^2.

On écarte le système de sa position d'équilibre puis on le lâche

1- Etablir l'équation du mouvement en fonction de la coordonnée xet préciser les expressions du facteur d'amortissement et lapulsation propre.

2- Dans quelle régime le système revienne sans oscillation à sa position d'équilibre le plusrapidement possible; En déduire le coefficient d'amortissement α

Partie II-On applique sur la masse m **(Figure 1-b)** une forcesinusoïdaleF(t)= F_0cos wt.

1- Etablir l'équation du mouvement en fonction de la coordonnée x
2- En supposant que la réponse (la solution) permanente est de la forme $x(t) = Xcos(wt - \emptyset)$. Calculer l'amplitude X et le déphasage $\emptyset$ lorsque w=20 rad/s et F_0 =50 N.

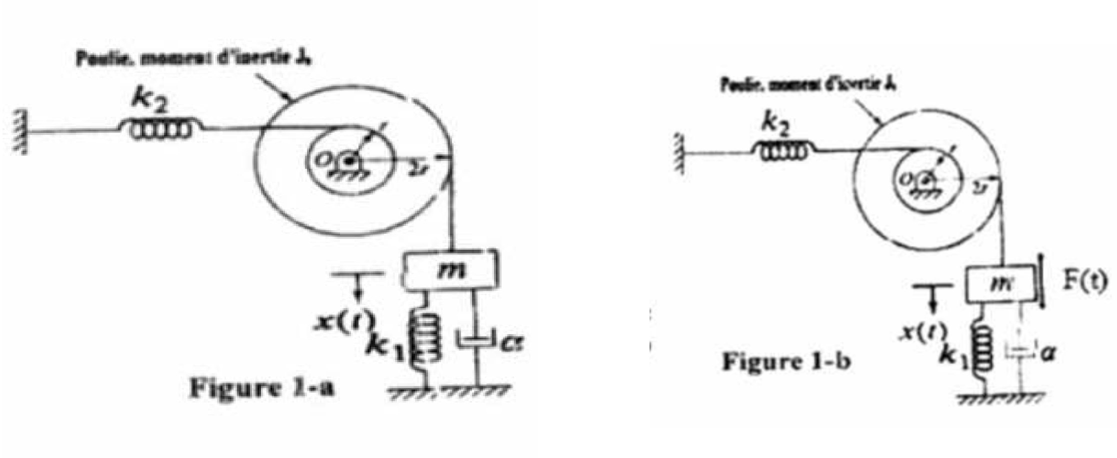
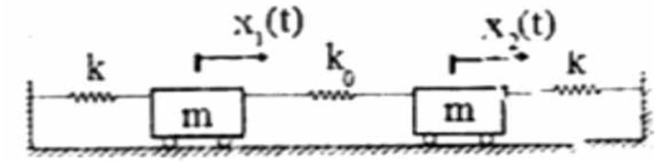


Figure 1-a Figure 1-b

Exercie 2 :

Pour le système de la figure ci-contre **(Figure 2)**

1- Ecrire les équations du mouvement des deux masses.
2- Déterminer les deux pulsations propres du système w_1 et w_2 .



(Figure 2)

2023-2024

solution examen mesures vibratoire

Ex1 : l'energie cinétique :

1) $E_c = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m . \dot{x}^2$ (1) $\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} J_0 \frac{\dot{x}^2}{(2r)^2} + \frac{1}{2} m$

avec $\theta = \frac{x}{2r} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{2r}$

donc $E_c = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J_0}{4r^2}\right) . \dot{x}^2$ (1)

Usystème : $U_{systeme} = U_{K_1} + U_{K_2}$

$U_{systeme} = \frac{1}{2} K_1 . x^2 + \frac{1}{2} K_2 . x$ (1)

la relation entre x et x' : $x = 2r.\theta$, $x' = r.\theta$

$\Rightarrow \frac{x'}{x} = \frac{r.\cancel{\theta}}{2r.\cancel{\theta}} \Rightarrow x' = \frac{x}{2}$ (1)

donc $U_{systeme} = \frac{1}{2} K_1 . x^2 + \frac{1}{2} K_2 . \frac{x^2}{4}$

$U_{systeme} = \frac{1}{2} x^2 \left(K_1 + \frac{K_2}{4}\right)$ (1)

l'énergie de dissipation : $D = \frac{1}{2} \alpha . \dot{x}^2$ (1)

larangien : $L = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J_0}{4r^2}\right) . \dot{x}^2 - \frac{1}{2}\left(K_1 + \frac{K_2}{4}\right) . x^2$ (1)

donc l'équation du Mvt : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$ (1)

$$\left(m + \frac{J_0}{4r^2}\right) . \ddot{x} + \left(K_1 + \frac{K_2}{4}\right) . x + \alpha . \dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{K_1 + \frac{K_2}{4}}{m + \frac{J_0}{4r^2}}\right) x + \frac{\alpha}{\left(m + \frac{J_0}{4.r^2}\right)} . \dot{x} = 0 \quad (1)$$

cette équation s'écrit de la forme :

$$\ddot{x} + 2\delta . \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K_1 + \frac{K_2}{4}}{m + \frac{J_0}{4.r^2}}} \quad (0,5) \quad \text{et} \quad 2\delta = \frac{\alpha}{m + \frac{J_0}{4.r^2}} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2\left(m + \frac{J_0}{4r^2}\right)}$$

2) le régime recherché c'est le régime critique

$\delta = \omega_0$ (1)

$$\frac{\alpha}{2\left(m+\frac{J_0}{4 \cdot r^2}\right)} = \sqrt{\frac{k_1+\frac{k_2}{4}}{m+\frac{J_0}{4r^2}}} \Rightarrow \alpha = \sqrt{2\left(m+\frac{J_0}{4r^2}\right)\cdot\left(k_1+\frac{k_2}{4}\right)}$$ (1)

A.N : $\alpha = 703{,}56\ kg \cdot s^{-1}$

II partie système forcé on reprend le système précédent et on applique une force

$$\ddot{x} + 2\sigma\dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \frac{F_0}{m+\frac{J_0}{4 \cdot r^2}} \cos(\omega t)$$ (1)

$$x_p = X\cos(\omega t + \phi)$$

avec $X = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2) + 2\sigma\cdot\omega)^2}} \Rightarrow X = 0{,}001136\ m.$ (0,5)

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sigma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) \Rightarrow \phi = 0{,}29\ rad = 13{,}17°$$ (0,5)

Ex 2 :

l'énergie cinétique : $T = \frac{1}{2}m\cdot\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\cdot\dot{x}_2^2$ (1)

énergie potentielle : $U = \frac{1}{2}k x_1^2 + \frac{1}{2}k x_2^2 + \frac{1}{2}k_0(x_1 - x_2)$ (1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$ (0,5)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$ (0,5)

donc : $L = \frac{1}{2}m\cdot\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1^2+x_2^2) - \frac{1}{2}k_0(x_1-x_2)^2$

$$m\ddot{x}_1^2 + kx_1 + k_0(x_1 - x_2) = 0$$ (0,5)

$$m\ddot{x}_2^2 + kx_2 + k_0(x_2 - x_1) = 0$$ (0,5)

la pulsation propre du système :

$$\ddot{x}_1 + \left(\frac{k}{m} + \frac{k_0}{m}\right)x_1 - \frac{k_0}{m}\cdot x_2 = 0$$ / la solution de l'équation

$$\ddot{x}_2 + \frac{k+k_0}{m}x_2 - \frac{k_0}{m}x_1 = 0$$

$x_1 = A e^{i(\omega t + \varphi)}$ $\Rightarrow \ddot{x}_1 = -A\omega^2 e^{i(\omega t+\varphi)}$ (0,5)

$x_2 = B e^{i(\omega t+\varphi)}$ $\Rightarrow \ddot{x}_2 = -B\omega^2 e^{i(\omega t+\varphi)}$ (0,5)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A\omega i e^{i(\omega t+\varphi)} \\ \dot{x}_2 = B\omega i e^{i(\omega t+\varphi)} \end{cases}$$

$$-\omega^2 A \cancel{e^{i(\omega t+\varphi)}} + \left(\frac{k+k_0}{m}\right) \cdot A \cancel{e^{i(\omega t+\varphi)}} - \frac{k_0}{m} \cdot B \cancel{e^{i(\omega t+}}$$

$$-\omega^2 B \cancel{e^{i(\omega t+\varphi)}} + \left(\frac{k+k_0}{m}\right) \cdot B \cancel{e^{i(\omega t+\varphi)}} - \frac{k_0}{m} \cdot A \cancel{e^{i(\omega t+}}$$

$$\left(\frac{k+k_0}{m} - \omega^2\right) A - \frac{k_0}{m} B = 0 \quad 0{,}5$$

$$-\frac{k_0}{m} \cdot A + \left(\frac{k+k_0}{m} - \omega^2\right) B = 0 \quad 0{,}5$$

on peut déduire une matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{k+k_0}{m} - \omega^2 & -\frac{k_0}{m} \\ -\frac{k_0}{m} & \frac{k+k_0}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{k+k_0}{m} - \omega^2\right)^2 - \frac{k_0^2}{m^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{k+k_0}{m} - \omega^2\right)^2 = \frac{\dots}{\dots}$$

deux cas :

$$\frac{k+k_0}{m} - \omega^2 = \pm \frac{k_0}{m} \quad 0{,}5$$

- $\frac{k+k_0}{m} - \omega_1^2 = \frac{k_0}{m} \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

- $\frac{k+k_0}{m} - \omega_2^2 = -\frac{k_0}{m} \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{k+2k_0}{m}$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_0}{m}}}$$

0,5