~~Corrig~~ Corrigé-type : Contrôle S1

Agro

Exo 1 :

$A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$

① Les polynômes caractéristiques :

$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2\\ 4 & 2-\lambda\end{vmatrix}$

$=(2-\lambda)^2-(-2)\times 4=(2-\lambda)^2+8.$

$=\lambda^2-4\lambda+4+8.$

$P_A(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+12.$ 1

$P_B(\lambda)=\det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 2 & -1\\ 3 & -2-\lambda & 0\\ -2 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$

$=-\lambda\begin{vmatrix}-2-\lambda & 0\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}3 & -2-\lambda\\ -2 & 2\end{vmatrix}$

$=-\lambda(-2-\lambda)(1-\lambda)-2(3(1-\lambda))-1(6-(-2\times(-2-\lambda)))$

$=(2\lambda+\lambda^2)(1-\lambda)-6+6\lambda-2+2\lambda$

$=2\lambda-2\lambda^2+\lambda^2-\lambda^3-8+8\lambda$

$=-\lambda^3-\lambda^2+10\lambda-8$ 1

$P_B(\lambda)$

② Les valeurs propres :

$P_A(\lambda)=0\Rightarrow$
$\lambda^2-4\lambda+12=0$

$\Delta=16-4(12)=-32<0$

λ n'existe pas 0,5

A n'est pas diagonalisable. 0,5

$P_B(\lambda)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=1 & 0{,}5\\ \lambda_2=-4 & 0{,}5\\ \lambda_3=2 & 0{,}5\end{cases}$

B est diagonalisable. $\Leftarrow$

③ Diagonalisation de A et B.

① A n'est pas diagonalisable.

~~Calcul de~~ Diagonalisation de B

$\lambda_1=1$:

$(A-I)v_1=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 3 & -3 & 0\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}-x+2y-z=0.\\ 3x-3y=0. \Rightarrow x=y.\\ -2x+2y-z=0.\end{cases}$

$-x+2x-z=0\Rightarrow x-z=0\Rightarrow x=z$

$v_1=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ x\\ x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

$v_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ 0,5

v_2 : $(A-\lambda_2 I) = (A-2I)v = 0$.

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 3 & -4 & 0\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-2x+2y-z=0\\ 3x-4y=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3}y.\\ -2x+2y-z=0.\end{cases}$$

$-\frac{8}{3}y+2y-z=0.$

$-\frac{8+6}{3}y-z=0.$

$-\frac{2}{3}y-z=0$

$z=-\frac{2}{3}y.$

$$v_2=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}y\\ y\\ -\frac{2}{3}y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ 1\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$v_2=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ 1\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$ 0,5

v_3 : $(A-\lambda_3)v_3=0 \Leftrightarrow (A+4)v=0.$

$$\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ 3 & 2 & 0\\ -2 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}4x+2y-z=0\\ 3x+2y=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}y.\\ -2x+2y-3z=0.\end{cases}$$

$4x-\frac{2}{3}y+2y-z=0$

$-\frac{8}{3}y+2y-z=0$

$z=-\frac{2}{3}y=$

$$v_3=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}y\\ y\\ -\frac{2}{3}y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$v_3=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$ 0,5

~~Diag~~ $B=PDP^{-1}$

$$P=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$ 0,5

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

Exo 2 :

1 - *Les valeurs propres :*

$\lambda_1=1$; $\lambda_2=2$. 1 0,5

λ_1 valeur double.

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix};\ v_2=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ +1\end{pmatrix};\ v_3=\begin{pmatrix}+2\\ -3\\ -1\end{pmatrix}.$$ 0,5 0,5 0,5

2 -

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ -1 & -6 & 2\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -3 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -3 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -\\ 2 & 0 & \\ 2 & 1 & \end{pmatrix}$$ 1

Exo 3 :

(S1) - $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}$

1) Les valeurs de a pour que A ne soit pas inversible :

$\det(A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a+1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 1

$\Rightarrow (a+1)\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$(a+1)(a\times 1 - 1\times 1) - 1(1-2) - (1-2a)$

$\Rightarrow (a+1)(a-1) - (1-2) - (1-2a) = 0$

$a^2 - a + a - 1$

$a^2 - \cancel{1} + 1 - 1 + 2a = 0$

$a^2 + 2a - 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8$

$a_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -\frac{2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$

$a_2 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -\frac{2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2}$ 1

2) - Pour $a = 0$: calcule de $\det(A)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(-1) - (1-2) - 1 = \cancel{-2+1}$

$= -1 + 1 - 1 = -1 \neq 0$

1

2) - Inverse de A :

$\cancel{\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & +1 & 1 \\ -2 & +4 & 0 \\ +1 & -3 & +1 \end{pmatrix}}$

$\cancel{A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

$\cancel{A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 1

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{com}(A)^T$ 1

$= -\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$ 1

3) - Résolution du système : $AX = b$.

$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$AX = b \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b$

$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \\ z = -2 \end{cases}$ 2

~~x~~ -1