

Corrigé Contrôle

Exercice 1 : (6 Points)

$$x(t) = \cos(200\pi t) + 2\cos(320\pi t).$$

1. **Fréquence maximale de x(t).**

$$f_{01} = 100\text{Hz}$$

$$f_{02} = 160\text{Hz} \quad f_{\max} = f_{02} = 160\text{Hz}$$

2. **Calcul de la fréquence de Nyquist ou d'échantillonnage f_N .**

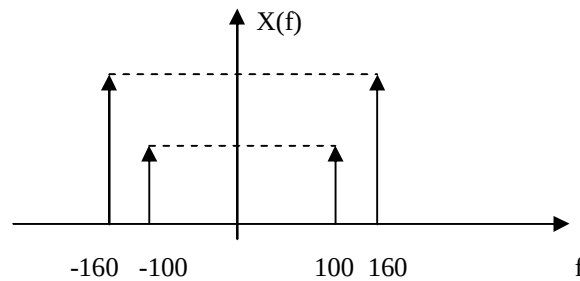
$$f_N = 2f_{\max} = 2 \cdot 160 = 320\text{Hz}$$

3. **Condition de Shannon**

$$f_e \geq 2f_{\max}$$

4. **Tracé de X(f)**

$$\text{Soit } X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f + 100) + \delta(f - 100)] + [\delta(f + 160) + \delta(f - 160)]$$



a) Ce signal est échantillonné idéalement à la fréquence $f_e = 500\text{Hz}$.

i) **Modélisation mathématique :**

$$x_{ei}(t) = x(t) \cdot \delta_{Te}(t),$$

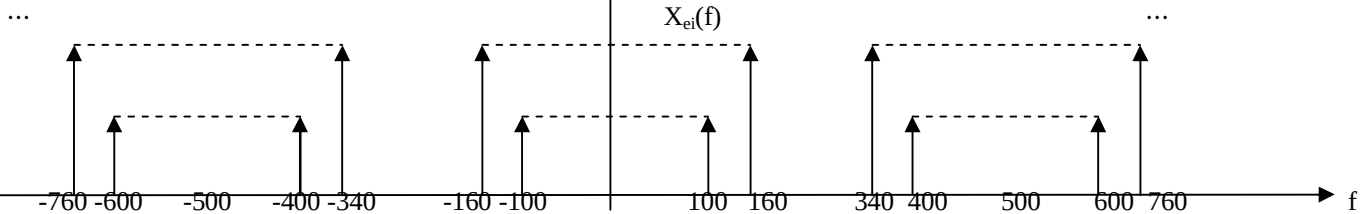
$$X_{ei}(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e) = f_e \text{Rep}_{f_e}[X(f)]$$

ii) La valeur $f_e = 500\text{Hz}$ est un choix adéquat ; $f_e = 500 > 320 = 2f_{\max}$ (théorème de Shannon respecté)

iii) **Calcul et tracé de $X_{ei}(f)$**

$$X_{ei}(f) = f_e \text{Rep}_{f_e}[X(f)] = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e)$$

$$X_{ei}(f) = \frac{f_e}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{\delta[(f - nf_e) + 100] + \delta[(f - nf_e) - 100]\} + f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{\delta[(f - nf_e) + 160] + \delta[(f - nf_e) - 160]\}$$



Conclusion : Le bon choix de la fréquence d'échantillonnage $f_e > 2f_{\max}$, théorème de Shannon respecté, ne donne pas de repliement spectral ce qui nous permet de récupérer le signal

Exercice 2 : (6 Points)

1. **On ne peut pas utiliser** cette expression pour un traitement numérique à cause des bornes infinies et de la variable fréquence f continue.

2. **Etape 1** : Limiter les bornes $X(f) = \sum_{k=k_0}^{k_0+(N-1)} x(k)e^{-j2\pi f k}$ prenons $k_0=0$ $X(f) = \sum_{k=0}^{(N-1)} x(k)e^{-j2\pi f k}$

Etape 2 : Discrétiser la fréquence :

$$f = n \Delta f \text{ où } \Delta f = 1/N ;$$

On pose la fréquence discrète $n = f/\Delta f \Rightarrow f = n \Delta f = n/N$;

On remplace dans l'équation on aura :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\pi \frac{n}{N} k}$$

Posons $W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ on aura alors $X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W_N^{-nk} \quad 0 \leq n \leq N-1$

3. **Développement pour $N = 4$ des équations de base de la TFR partagée en temps**
 $N = 4$;

$$X(n) = \sum_{k=0}^3 x(k)W_4^{-nk} \quad 0 \leq n \leq 3$$

TFR partagée en temps $k=2i$ et $k=2i+1$

$$X(n) = X_1(n) + W_4^{-n} X_2(n)$$

$$X_1(n) = \sum_{i=0}^1 x(2i)W_2^{-ni} \quad \text{et} \quad X_2(n) = \sum_{i=0}^1 x(2i+1)W_2^{-ni} \quad 0 \leq n \leq 3$$

$$X(0) = X_1(0) + W_4^{-0} X_2(0)$$

$$X(1) = X_1(1) + W_4^{-1} X_2(1)$$

$$X(2) = X_1(2) + W_4^{-2} X_2(2)$$

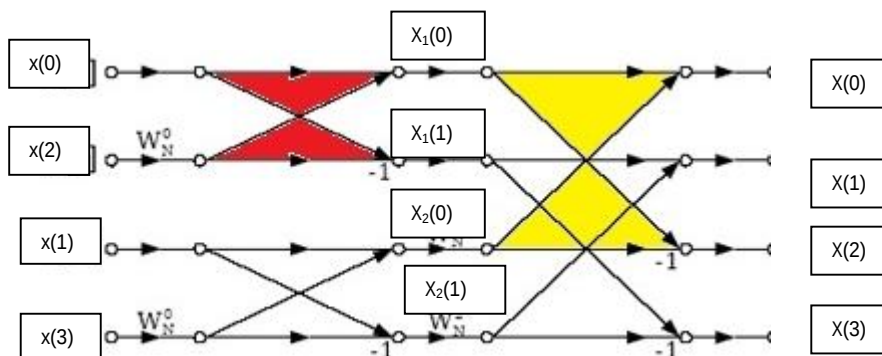
$$X(3) = X_1(3) + W_4^{-3} X_2(3)$$

$$X_1(0) = x(0) + W_2^{-0} x(2) = X_1(2) \quad ; \quad X_2(0) = x(1) + W_2^{-0} x(3) = X_2(2)$$

$$X_1(1) = x(0) + W_2^{-1} x(2) = X_1(3) \quad ; \quad X_2(1) = x(1) + W_2^{-1} x(3) = X_2(3)$$

$$X_1(2) = x(0) + W_2^{-2} x(2) = X_1(0) \quad ; \quad X_2(2) = x(1) + W_2^{-2} x(3) = X_2(0)$$

$$X_1(3) = x(0) + W_2^{-3} x(2) = X_1(1) \quad ; \quad X_2(3) = x(1) + W_2^{-3} x(3) = X_2(1)$$



Exercice 3 : (8 Points)

1. Fonction de transfert G(p)

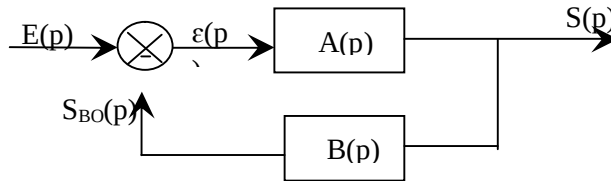
$$x(t) = R i(t) + y(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{C} \int i dt \quad ; \quad i(t) = C \frac{dy(t)}{dt}$$

$$x(t) = R C \frac{dy(t)}{dt} + y(t) \xrightarrow{\text{TL (ci=0)}} X(p) = RCp Y(p) + Y(p)$$

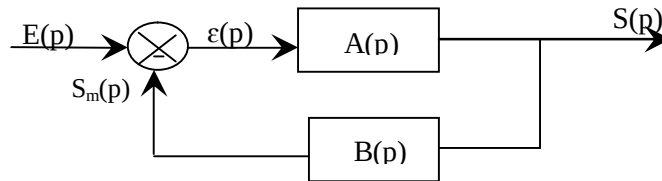
$$A(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{1+RCp}$$

1. Fonction de transfert en boucle ouverte ; $H_{BO}(p)$



$$H_{BO}(p) = \frac{S_{BO}(p)}{E(p)} = \frac{B(p) S(p)}{E(p)} = \frac{B(p)[A(p)\varepsilon(p)]}{E(p)} = \frac{B(p)[A(p)E(p)]}{E(p)} = B(p)A(p)$$

2. Fonction de transfert en boucle fermée ; $H(p)$



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}; \quad S(p) = A(p)\varepsilon(p) = A(p)[E(p) - B(p)S(p)]$$

$$S(p)[1 + B(p)A(p)] = A(p)E(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + B(p)A(p)} = \frac{A(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

3. Expression de $\varepsilon(p)$ en fonction de $E(p)$ et $H_{BO}(p)$

$$H_{BO}(p) \text{ peut s'écrire sous forme de } \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+b_1p+b_2p^2+\dots+b_mp^m}{1+a_1p+a_2p^2+\dots+a_np^n} \quad \alpha \text{ représente la classe du système.}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= E(p) - S_m(p) \\ &= E(p) - B(p)S(p) = E(p) - B(p)A(p)\varepsilon(p) \end{aligned}$$

$$\varepsilon(p)[1 + (A(p)B(p))] = E(p) \rightarrow \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1+A(p)B(p)} = \frac{E(p)}{1+H_{BO}(p)}$$

4. Pour $\alpha=0$ (pas d'intégration dans la chaîne directe) ;

$$\alpha=0 \rightarrow H_{BO}(p) = K \frac{1+b_1p+b_2p^2+\dots+b_mp^m}{1+a_1p+a_2p^2+\dots+a_np^n} \rightarrow \lim_{p \rightarrow 0} H_{BO}(p) = K$$

a. L'erreur statique de position ε_p . $\rightarrow e(t) = u(t) \rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$

$$\varepsilon_p = \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{\frac{1}{p}}{1 + H_{BO}(p)} \right) = \frac{1}{1+K}$$

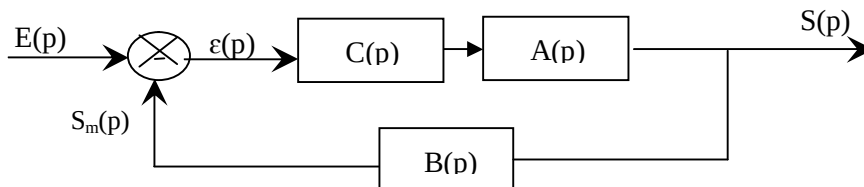
b. L'erreur de vitesse ε_v . $\rightarrow e(t) = t u(t) \rightarrow E(p) = \frac{1}{p^2}$

$$\varepsilon_v = \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{\frac{1}{p^2}}{1 + H_{BO}(p)} \right) = \frac{1}{p} \frac{1}{1+K} \rightarrow \infty$$

c. **Conclusion** : La précision dépend du gain statique K ; $K \nearrow$, $\varepsilon_p \searrow$; précision meilleure.
 $\varepsilon_v \rightarrow \infty$.

Correction du système asservi

a. Schéma du système corrigé



b. **Le rôle essentiel du correcteur** consiste à améliorer les performances -précision, rapidité et stabilité- du système.

Pour un correcteur $C(p)$; $H_{BO}(p) = A(p) B(p) C(p)$

c. Pour un correcteur proportionnel $C(p) = G$. Calcul de ε_p et ε_v . **Conclusion**

$$C(p) = G \rightarrow H_{BO}(p) = G K \frac{1+b_1p+b_2p^2+\dots+b_mp^m}{1+a_1p+a_2p^2+\dots+a_np^n} \rightarrow \lim_{p \rightarrow 0} H_{BO}(p) = G K$$

✓ L'erreur statique de position ε_p . $\rightarrow e(t) = u(t) \rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$

$$\varepsilon_p = \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{\frac{1}{p}}{1 + H_{BO}(p)} \right) = \frac{1}{1+G K}$$

✓ L'erreur de vitesse ε_v . $\rightarrow e(t) = t u(t) \rightarrow E(p) = \frac{1}{p^2}$

$$\varepsilon_v = \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{\frac{1}{p^2}}{1 + H_{BO}(p)} \right) = \frac{1}{p} \frac{1}{1+G K} \rightarrow \infty$$

Conclusion : La précision est meilleure et elle dépend du gain statique K et du gain G ; $G \nearrow$, $\varepsilon_p \searrow$ précision meilleure. Le correcteur P améliore la précision sans annuler l'erreur statique de position.
 $\varepsilon_v \rightarrow \infty$.

d. Pour un correcteur Intégral $C(p) = \frac{1}{T_i p}$. Calcul de ε_p et ε_v . **Conclusion**

$$C(p) = \frac{1}{T_i p} \rightarrow H_{BO}(p) = \frac{K}{p} \frac{1+b_1p+b_2p^2+\dots+b_mp^m}{1+a_1p+a_2p^2+\dots+a_np^n} \rightarrow \lim_{p \rightarrow 0} H_{BO}(p) = \frac{K}{p} \rightarrow \infty$$

✓ L'erreur statique de position ε_p . $\rightarrow e(t) = u(t) \rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$

$$\varepsilon_p = \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{\frac{1}{p}}{1 + H_{BO}(p)} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K}{p}} = 0$$

✓ **L'erreur de vitesse ε_v .** $\rightarrow e(t) = t u(t) \rightarrow E(p) = \frac{1}{p^2}$

$$\varepsilon_v = \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{\frac{1}{p^2}}{1 + H_{BO}(p)} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{K}{p}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \frac{1}{\frac{p + K}{p}} = \frac{1}{K}$$

Conclusion : Le correcteur I permet d'améliorer la précision ; il annule ε_p et ε_v dépend du gain statique K.