Examen de Physique I

Exercice 01 (06 points) (Micro-Interrogation n°3)

Dans le repère cartésien, le mouvement d'un mobile M est défini par les équations suivantes: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

1. Trouver l'équation de la trajectoire.
2. Donner l'expression du vecteur position.
3. Trouver les composantes du vecteur vitesse ainsi que son module.
4. Trouver les composantes du vecteur accélération ainsi que son module.

Exercice 02 (06 points)

Dans le système de coordonnées sphériques $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$, le mouvement d'un mobile M est défini par les éléments : ***r***, $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ comme il est représenté sur la figure 1.

1. Ecrire la relation entre les éléments du repère cartésien et les éléments du repère sphériques.
2. Donner l'expression du vecteur position dans le repère cartésien puis dans le repère sphérique.
3. Donner l'expression des vecteurs unitaires $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$, en fonction des vecteurs unitaires $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
4. Trouver la dérivée temporelle du vecteur unitaire $\overrightarrow{\mathbf{u_\theta}}$.

Exercice 03 (08 points)

Une particule de masse ***m*** est lancée avec une vitesse $\boldsymbol{V_o}$ à partir du point $\boldsymbol{A_o}$ d'une trajectoire demi-circulaire de rayon ***R*** (Fig. 2). On néglige les forces de frottement.

1. Donner les composantes des forces exercées sur la particule dans le système de coordonnées intrinsèques au point ***A*** et représenter ces forces sur le schéma.
2. Ecrire les équations de mouvement dans le système de coordonnées intrinsèques au point ***A***.
3. Donner l'expression de la vitesse et de la force de contacte exercée par la piste sur la particule au point ***A*** en fonction de **m**, $\boldsymbol{V_o}$, ***R***, **g** et **θ**.
4. Si $V_o = \sqrt{2Rg}$, quel est donc la vitesse et la force de contacte au point ***B***.

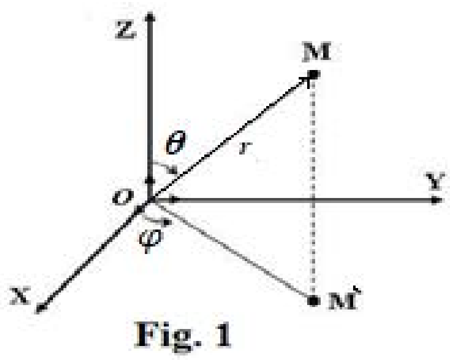


Fig. 1

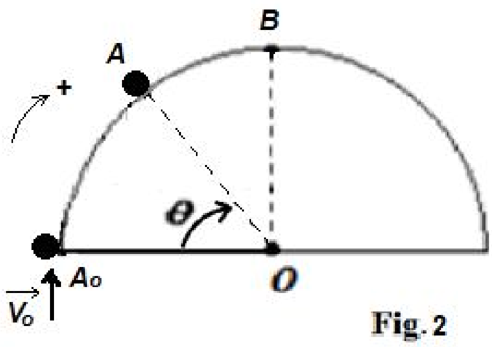


Fig. 2

Bonne chance

Corrigé Type : Examen physique I

Exercice 01 (06 pts.)-(*Micro-Interrogation n°03*)

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

1) Equation de la trajectoire : y=f(x)

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \quad ou\ bien\ \ y = \sqrt{1-(x/2)^2}$$ 1

2) Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

$$\overrightarrow{OM} = 2\cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath}$$ 1

3) Composante et module de la vitesse

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = -2.\sin t & 0.5 \\ V_y = \frac{dy}{dt} = \cos t & 0.5 \end{cases}$$

$$V = \|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \Rightarrow V = \sqrt{1+3\sin^2 t}$$ 1

4) Composantes et module de l'accélération

$$\begin{cases} \gamma_x = \frac{dV_x}{dt} = -2.\cos t & 0.5 \\ \gamma_y = \frac{dV_y}{dt} = -\sin t & 0.5 \end{cases}$$

$$\gamma = \|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \Rightarrow \gamma = \sqrt{1+3\cos^2 t}$$ 1

Exercice 02 (06 pts.)

1. Relation entre (x,y,z) et (r, θ, φ)

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi & 0.5 \\ y = r\sin\theta\sin\varphi & 0.5 \\ z = r\cos\theta & 0.5 \end{cases}$$

2. Vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

- Dans le repère cartésien :

$$\vec{r} = r(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k})$$ 0.5

- Dans le repère sphérique: $\vec{r} = r.\overrightarrow{u_r}$ 0.5

3. $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$, en fonction de $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \vec{r}/r & 0.25 \\ \overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_r}(\theta + \pi/2) & 0.25 \\ \overrightarrow{u_\varphi} = \overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta} & 0.25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k} & 0.5 \\ \overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} & 0.5 \\ \overrightarrow{u_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} & 0.5 \end{cases}$$

4. Expression $d\overrightarrow{u_\theta}/dt$

$$\overrightarrow{u_\theta} = f(\theta,\varphi) \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \frac{\partial\overrightarrow{u_\theta}}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\overrightarrow{u_\theta}}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$ 0.25

$$\frac{\partial\overrightarrow{u_\theta}}{\partial\theta} = -\overrightarrow{u_r}$$ 0.25

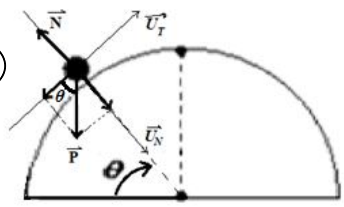
$$\frac{\partial\overrightarrow{u_\theta}}{\partial\varphi} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_\varphi}$$ 0.25

$$\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_r} + \cos\theta\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{u_\varphi}$$ 0.5

Exercice 03 (08 pts.)

1) Composantes des forces et schéma

1



$$\vec{P}\begin{pmatrix} -P\cos\theta \\ P\sin\theta \end{pmatrix}$$ 0.25 0.25 $$\vec{N}\begin{pmatrix} 0 \\ -N \end{pmatrix},$$ 0.25 0.25 $$\vec{\gamma}\begin{pmatrix} \gamma_T \\ \gamma_N \end{pmatrix}$$

2) Les équations de mouvement :

$$\sum\vec{F} = m\,\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \vec{N} = m\,\vec{\gamma}$$ 0.5

$$\begin{cases} \gamma_T = dV/dt & 0.25 \\ \gamma_N = V^2/R & 0.25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -mg\cos\theta = m\,dV/dt \ldots\ldots(1) & 1 \\ mg\sin\theta - N = m\,V^2/R \ldots\ldots(2) & 1 \end{cases}$$

3) Expression de V_A et N_A.

$$d'après\ l'Eq.(1), \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -g\cos\theta$$

Remplaçons : $\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{R}$, on trouve :

$$\int_{V_0}^{V_A} V.dV = -Rg\int_0^{\theta}\cos\theta.d\theta$$

Après intégration, on a :

$$V_A = \sqrt{V_0^2 - 2Rg\sin\theta}$$ 1

$$A\ partir\ de\ l'Eq.(2), \quad N = mg\sin\theta - m\frac{V^2}{R}$$

$$\Rightarrow N_A = 3mg\sin\theta - m\frac{V_0^2}{R}$$ 1

4) V_B et N_B au point $B(\theta = \pi/2)$:

$$pour\ V_0 = \sqrt{2Rg} \Rightarrow \begin{cases} V_B = 0 & 0.5 \\ N_B = mg & 0.5 \end{cases}$$