

# Correction de l'examen de Géométrie

L2 Mathématiques

1]

On considère l'espace  $\mathbb{R}_1[X]$  muni du produit scalaire

$$(p|q) = \int_0^1 p(x)q(x) dx.$$

Déterminons une base orthonormée.

On part de la base canonique

$$(1, X).$$

## Étape 1 : premier vecteur

Posons

$$e_1 = 1.$$

Sa norme vaut

$$\|e_1\|^2 = (1|1) = \int_0^1 1 dx = 1.$$

Donc  $e_1$  est déjà unitaire.

## Étape 2 : second vecteur

On orthogonalise  $X$  :

$$u_2 = X - (X|e_1)e_1.$$

Or

$$(X|e_1) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$u_2 = X - \frac{1}{2}.$$

Calculons sa norme :

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx.$$

Or

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}.$$

Donc

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx + \int_0^1 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Ainsi

$$\|u_2\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

On obtient

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = 2\sqrt{3} \left( X - \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3}(2X - 1).$$

Une base orthonormée est donc

$$\boxed{\left( 1, \sqrt{3}(2X - 1) \right)}.$$

**2]**

Soient  $G$  l'isobarycentre de  $A, B, C$  et  $G'$  l'isobarycentre de  $A', B', C'$ .

On sait que

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}),$$

et

$$\vec{OG}' = \frac{1}{3}(\vec{OA}' + \vec{OB}' + \vec{OC}').$$

Alors

$$\vec{GG}' = \vec{OG}' - \vec{OG}$$

d'où

$$\vec{GG}' = \frac{1}{3} \left( \vec{AA}' + \vec{BB}' + \vec{CC}' \right).$$

Ainsi,

$$\vec{AA}' + \vec{BB}' + \vec{CC}' = \vec{0}_E$$

équivalent à

$$\vec{GG}' = \vec{0}_E.$$

Donc

$$\boxed{\vec{AA}' + \vec{BB}' + \vec{CC}' = \vec{0}_E \iff G = G'}.$$

**3]**

### 1) Définition

Un sous-espace affine  $F$  de  $E$  est une partie non vide qui est stable par barycentration.

### 2) Montrer que $D \in F$

On a

$$\vec{AC} = 3\vec{AB} + \vec{BD}.$$

donc

$$\vec{AD} + \vec{DC} = 3\vec{AD} + 3\vec{DB} + \vec{BD}.$$

d'où

$$-2\vec{AD} - \vec{CD} + 2\vec{BD} = \vec{0}.$$

Ainsi,  $D \in F$ .

## Exercice 4

Les droites sont

$$D : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -3t - 1 \\ z = t + 1 \end{cases}$$

et

$$D' : \begin{cases} x = 3t' + 2 \\ y = -t' \\ z = t' + 1. \end{cases}$$

Un vecteur directeur de  $D$  est

$$u = (2, -3, 1),$$

et un vecteur directeur de  $D'$  est

$$v = (3, -1, 1).$$

Prenons

$$A(1, -1, 1) \in D, \quad B(2, 0, 1) \in D'.$$

Alors

$$\vec{AB} = (1, 1, 0).$$

Les droites sont coplanaires si et seulement si les vecteurs  $u, v$  et  $\vec{AB}$  sont liés. Comme les vecteurs  $u, v$  et  $\vec{AB}$  ne sont pas liés on a

$D$  et  $D'$  ne sont pas dans un même plan.

## Exercice 5

### 1) Équation du plan

Les points sont

$$A(1, 0, 0), \quad B(1, 1, 0), \quad C(0, 0, 1).$$

On calcule

$$\vec{AB} = (0, 1, 0), \quad \vec{AC} = (-1, 0, 1).$$

Un vecteur normal est

$$n = \vec{AB} \wedge \vec{AC}.$$

Donc

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, 1).$$

Une équation du plan est donc

$$x + z + d = 0.$$

Comme  $A(1, 0, 0) \in P$ ,

$$1 + 0 + d = 0$$

d'où

$$d = -1.$$

Ainsi

$$\boxed{P : x + z - 1 = 0}.$$

## 2) Distance du point $D(0, 1, 0)$ au plan

La formule de distance est

$$d(P, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ici

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad d = -1.$$

Donc

$$d(P, D) = \frac{|0 + 0 + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi

$$\boxed{d(P, D) = \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$