

Corrigé avec barème

1] (5 points)

Base orthonormée de $\text{Vect}(x, x^2)$ pour $(p|q) = \int_0^1 p(x)q(x) dx$

- $\|x\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ (1 pt)

- $e_1 = \sqrt{3}x$ (1 pt)

- $(x^2|e_1) = \sqrt{3} \int_0^1 x^3 dx = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (1 pt)

- $u_2 = x^2 - \frac{(x^2|e_1)}{(e_1|e_1)}e_1 = x^2 - \frac{3}{4}x$ (1 pt)

- $\|u_2\|^2 = \frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{9}{48} = \frac{1}{80}$
Donc $e_2 = \sqrt{80} \left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)$ (1 pt)

$$(e_1, e_2) = \left(\sqrt{3}x, \sqrt{80} \left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) \right)$$

2] (5 points)

Plan P passant par $A(1, 0, 0)$ et dirigé par $u = (-1, 0, 1)$, $v = (1, 1, 0)$

- Écriture paramétrique : (3 pts)

$$M(x, y, z) \in P \implies \exists s, t \in \mathbb{R} : \vec{AM} = s(-1, 0, 1) + t(1, 1, 0),$$

donc

$$P : \begin{cases} x = 1 - s + t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

- Après élimination des paramètres on trouve : (2 pts)

$$x = 1 - z + y \implies x - y + z - 1 = 0$$

$$P : x - y + z - 1 = 0$$

3] (10 points)

a) (2 pts)

On cherche $\vec{n} = (x, y, z)$ orthogonal à $(1, 0, 1)$ et $(1, 1, 0)$, donc :

$$((1, 0, 1)|(x, y, z)) = 0, \quad ((1, 1, 0)|(x, y, z)) = 0$$

d'où

$$x + z = 0, \quad x + y = 0$$

Ainsi,

$$y = z = -x.$$

En prenant $x = -1$, on obtient :

$$\vec{n} = (-1, 1, 1).$$

b) (2 pts)

Plan Q passant par $B(1, 0, 0)$:

$$Q : -x + y + z = 0 = -(1) + 0 + 0$$

$$\boxed{Q : -x + y + z + 1 = 0}$$

c) (2 pts)

Distance :

$$d(C, Q) = \frac{|-1 + 2 + 0 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

d) (2 pts)

$$(CD) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$Q : -x + y + z + 1 = 0,$$

$$-(1 - 2t) + (2 - 2t) + t + 1 = 0$$

donne

$$t = -2$$

Donc :

$$P \cap (CD) = \{I(1 - 2(-2), 2 - 2(-2), -2)\} = \{I(5, 6, -2)\}$$

e) (2 pts)

Soit P le plan vérifiant : $P \perp (CD)$ et $A \in P$, donc un vecteur normal à P est $\vec{n} = (-2, -2, 1)$. Comme $A(1, 0, 0) \in P$, une équation de P est

$$-2x - 2y + z + 2 = 0.$$

L'intersection $H = P \cap (CD)$ est le projeté orthogonal de A sur (CD) . En remplaçant les équations paramétriques de (CD) on trouve $-2(1 - 2t) - 2(2 - 2t) + t + 2 = 0$, alors

$$t = \frac{4}{9}.$$

Ainsi,

$$H \left(\frac{1}{9}, \frac{10}{9}, \frac{4}{9} \right)$$

et

$$d(A, (CD)) = AH = \sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$