HADJOU Brahimmathématiques/Semestre 6/Transformations intégrales dans les espaces Lp/Groupe 1						
Matricule	Note	Absent	Absence Justifiée	Observation	Section	Groupe
212134009483	5.07				Section	Groupe 1
212134007340	5.59				Section	Groupe 1
232334094814	6.88				Section	Groupe 1
232334042409	5.75				Section	Groupe 1
222234067712	5.07				Section	Groupe 1
212134010086	11.0				Section	Groupe 1
232334057504	9.8				Section	Groupe 1
232334032120	8.25				Section	Groupe 1
222234046713	10.55				Section	Groupe 1
212134002887	4.14				Section	Groupe 1
232334045014	14.3				Section	Groupe 1
232334072804	7.55				Section	Groupe 1
232334008103	18.75				Section	Groupe 1
232334057517	15.0				Section	Groupe 1
212234087810	9.42				Section	Groupe 1
222234008914					Section	Groupe 1
232334044608	4.47				Section	Groupe 1

HADJOU Brahim/mathématiques/Semestre 6/Transformations intégrales dans les espaces Lp/Sectio		
Matricule	Note	
212134009483	2.0	
212134007340	0.25	
232334094814	6.0	
232334042409	4.75	
222234067712	0.25	
212134010086	10.25	
232334057504	7.25	
232334032120	6.75	
222234046713	4.25	
212134002887	5.75	
232334045014	5.25	
232334072804	4.5	
232334008103	19.5	
232334057517	4.25	
212234087810	4.75	
222234008914		
232334044608	5.25	
212134002923	3.5	
232334049712	8.25	
222234057116	5.25	
232334064012	0.25	
232334072314	6.75	
232334015817	9.5	
202034002535	7.75	
232334021802	2.5	
232334068001	1.0	
222234018813	3.75	
202034007817		

232334046010	6.25	
232334061313	7.0	
222234084513	11.5	
222234042113	2.0	
232334041907	18.75	
232334021008	10.5	
232334031911	9.0	

HADJOU Brahimmathématiques/Semestre 6/Transformations intégrales dans les espaces Lp/Groupe 2						
Matricule	Note	Absent	Absence Justifiée	Observation	Section	Groupe
212134002923	9.0				Section	Groupe 2
232334049712	7.5				Section	Groupe 2
222234057116	8.5				Section	Groupe 2
232334064012	8.5				Section	Groupe 2
232334072314	8.75				Section	Groupe 2
232334015817	12.0				Section	Groupe 2
202034002535	11.0				Section	Groupe 2
232334021802	9.75				Section	Groupe 2
232334068001	14.25				Section	Groupe 2
222234018813	7.25				Section	Groupe 2
202034007817					Section	Groupe 2
232334046010	8.38				Section	Groupe 2
232334061313	9.0				Section	Groupe 2
222234084513	18.88				Section	Groupe 2
222234042113	6.25				Section	Groupe 2
232334041907	16.5				Section	Groupe 2
232334021008	12.88				Section	Groupe 2
232334031911	14.0				Section	Groupe 2

Brahim Hadjou

UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI DEPARTEMENT : MI Date : 09/05/2026

Examen du module Transformations intégrales dans les espaces Lp Durée : 1h30

Exercice 1 (2+5 = 7 points).

Soit la fonction $f(t) = e^{-t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.

1) En utilisant les définitions, déterminer x_f , $D_{\mathcal{L}f}$ et $\mathcal{L}[f(t)](s)$.

2) En utilisant la transformée de Laplace, résoudre le problème de valeurs initiales suivant

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t) \quad \text{pour} \quad t \geq 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2. \end{cases}$$

Exercice 2 (2+3+3 = 8 points).

On considère les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

1) Montrer que $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$.

2) En utilisant la définition de la transformée de Fourier, déterminer $\mathcal{F}f$.

3) En utilisant $\mathcal{F}f$ et les propriétés de la transformée de Fourier, déterminer $\mathcal{F}g$.

Exercice 3 (2+3 = 5 points).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 < \lambda_n(\Omega) < \infty$ et soit $(r, s) \in [1, \infty[^2$ tel que $r < s$. Montrer que

1) si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors $f \in L^s(\Omega)$ et $\|f\|_{L^s(\Omega)} \leq \left(\lambda_n(\Omega)\right)^{\frac{1}{s}} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$,

2) si $f \in L^s(\Omega)$, alors $f \in L^r(\Omega)$ et $\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \left(\lambda_n(\Omega)\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} \|f\|_{L^s(\Omega)}$. (Indice : prendre $p = \frac{s}{r}$ et appliquer l'inégalité de Hölder aux fonctions $|f|^r$ et $\mathbb{1}_\Omega$.)

Bon succès

Corrigé type

Exercice 1 (2+5 = 7 points).

1) Par définition, on a : $x_f = \inf\{x \in \mathbb{R}; f(t)e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}_+^*)\}$ et $D_{\mathcal{L}f} = \{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > x_f\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\int_0^{\infty} |f(t)e^{-xt}|dt = \int_0^{\infty} e^{-(x+1)t}dt = \begin{cases} \int_0^{\infty} dt & si\ x = -1 \\ \left[-\frac{e^{-(x+1)t}}{x+1}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} & si\ x \neq -1 \end{cases} =$

$\begin{cases} +\infty & si\ x \leq -1 \\ \frac{1}{x+1} & si\ x > -1. \end{cases}$ D'où $\boxed{x_f = \inf]-1,\infty[= -1}$ et $\boxed{D_{\mathcal{L}f} = \{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > -1\}}$. $\boxed{1}$

Par définition, pour tout $s \in D_{\mathcal{L}f}$, on a $\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_{\mathbb{R}_+^*} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+1)t}dt = -\frac{1}{s+1}\left[e^{-(s+1)t}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = -\frac{1}{s+1}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-(s+1)t} - 1\right) = \frac{1}{s+1}$, vu que $s = x + iy$ avec $x > -1$ et qu'on a $\left|e^{-(x+iy+1)t}\right| = \left|e^{-(x+1)t}e^{-iyt}\right| = e^{-(x+1)t}\left|e^{-iyt}\right| = e^{-(x+1)t}$ et $\lim_{t\to+\infty} e^{-(x+1)t} = 0$. D'où : $\boxed{\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s+1}}$. $\boxed{1}$

2) <u>Première étape : on détermine $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$</u>. De la question 1, on a : $\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s+1}$. En prenant la transformée de Laplace des deux membres de l'équation différentielle, on obtient

$$\mathcal{L}[y''(t) + 3y'(t) + 2y(t)](s) = \frac{1}{s+1}. \quad \boxed{0{,}5}$$

En utilisant les propriétés de linéarité et de la transformée d'une dérivée, on obtient

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 3\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = \frac{1}{s+1}. \quad \boxed{1}$$

Sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$, cela donne : $(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{1}{s+1} + s + 1$, d'où

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)} + \frac{s+1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+1)(s+2)} + \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} + \frac{1}{s+2}.} \quad \boxed{0{,}5}$$

<u>Deuxième étape : on détermine $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))$</u>. En utilisant la propriété de linéarité, on obtient

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right).$$

On a $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) = \mathcal{U}(t)e^{-2t}$ $\boxed{0{,}5}$

Pour calculer $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\right)$, on effectue une décomposition en fractions partielles et on utilise la propriété de linéarité :

$\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+2} \Rightarrow A(s+1)(s+2) + B(s+2) + C(s+1)^2 = 1 \Rightarrow$

$\begin{cases} A + C = 0 \\ 3A + B + 2C = 0 \\ 2A + 2B + C = 1 \end{cases} \Rightarrow -A = B = C = 1 \Rightarrow \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+2}$ $\boxed{0{,}75}$

D'où $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+2}\right) = -\mathcal{U}(t)e^{-t} + \mathcal{U}(t)te^{-t} + \mathcal{U}(t)e^{-2t}$ $\boxed{1{,}25}$.

On obtient ainsi :

$y(t) = -\mathcal{U}(t)e^{-t} + \mathcal{U}(t)te^{-t} + \mathcal{U}(t)e^{-2t} + \mathcal{U}(t)e^{-2t} = -\mathcal{U}(t)e^{-t} + \mathcal{U}(t)te^{-t} + 2\mathcal{U}(t)e^{-2t}$,

i.e. $\boxed{y(t) = (t-1)e^{-t} + 2e^{-2t},\ \ \forall\, t \geq 0}$ $\boxed{0{,}5}$

Exercice 2 (2+3+3 = 8 points).

1) On remarque que $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ avec $[-1,1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. $\boxed{0{,}25}$

On a $\int_{\mathbb{R}} |f| dx = \int_{-1}^{1} dx = 2 < \infty$, donc $f \in L^1(\mathbb{R})$. $\boxed{0{,}75}$

On remarque que $g = g_1 f$ où $g_1(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On a $g_1 \in C(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, donc $g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. $\boxed{0{,}25}$

On a $\int_{\mathbb{R}} |g| dx = \int_{-1}^{1} |x| dx = 2\int_0^1 x dx = [x^2]_{x=0}^{x=1} = 1 < \infty$, , donc $g \in L^1(\mathbb{R})$. $\boxed{0{,}75}$

2) Par définition, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a $\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i x \xi} dx =$

$$\begin{cases} \left[-\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{2\pi i \xi}\right]_{x=-1}^{x=1} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \int_{-1}^{1} dx & \text{si } \xi = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{e^{2\pi i \xi} - e^{-2\pi i \xi}}{2\pi i \xi} & \text{si } \xi \neq 0 \quad \boxed{2} \\ 2 & \text{si } \xi = 0 \quad \boxed{0{,}5} \end{cases} = \boxed{\begin{cases} \frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 2 & \text{si } \xi = 0 \end{cases}}. \ \boxed{0{,}5}$$

3) On a $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}^1 f = g \in L^1(\mathbb{R})$, donc, en utilisant les propriétés 1 (linéarité) et 10 (dérivation et multiplication monomiale), $\mathcal{F}g = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left(-2\pi i \mathcal{F}(\mathbb{M}^1 f)\right) = \boxed{-\frac{1}{2\pi i}\frac{d\mathcal{F}f}{d\xi}}$. $\boxed{2{,}5}$

Ainsi, pour $\xi \in \mathbb{R}^*$, on a $\mathcal{F}g(\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{(\pi\xi)(2\pi)\cos 2\pi\xi - \pi \sin 2\pi\xi}{(\pi\xi)^2}\right) = \frac{i}{2}\left(\frac{2\pi\xi \cos 2\pi\xi - \sin 2\pi\xi}{(\pi\xi)^2}\right)$

Pour $\xi = 0$, on a $\mathcal{F}g(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \int_{-1}^{1} x dx = 0$.

D'où $\boxed{\mathcal{F}g(\xi) = \begin{cases} \frac{i}{2}\left(\frac{2\pi\xi\cos 2\pi\xi - \sin 2\pi\xi}{(\pi\xi)^2}\right) & \text{si } \xi \neq 0 \\ 0 & \text{si } \xi = 0 \end{cases}}$. $\boxed{0{,}5}$

Exercice 3 (2+3 = 5 points).

1) Supposons que $f \in L^\infty(\Omega)$. Alors, par la proposition 1.19, $|f| \leq N_\infty(f) = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ p.p. $\boxed{0{,}5}$.

Donc $N_s(f)^s = \int_\Omega |f|^s dx \leq \int_\Omega \left(\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^s dx = \left(\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^s \int_\Omega \mathbb{1}_\Omega dx = \left(\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^s \lambda_n(\Omega) < \infty$. $\boxed{1}$

D'où $f \in L^s(\Omega)$ et $\|f\|_{L^s(\Omega)} = N_s(f) = \left(\int_\Omega |f|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\left(\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^s \lambda_n(\Omega)\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\lambda_n(\Omega)\right)^{\frac{1}{s}} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$. $\boxed{0{,}5}$

2) Supposons que $f \in L^s(\Omega)$. On a $N_r(f)^r = \int_\Omega |f|^r dx = \int_\Omega |f|^r \mathbb{1}_\Omega dx$. On pose $p = \frac{s}{r}$, donc $p' = \frac{s}{s-r}$

et, grâce à l'inégalité de Hölder, $\int_\Omega |f|^r \mathbb{1}_\Omega dx \leq \left(\int_\Omega (|f|^r)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\mathbb{1}_\Omega|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_\Omega |f|^s dx\right)^{\frac{r}{s}} \left(\int_\Omega \mathbb{1}_\Omega dx\right)^{\frac{s-r}{s}} =$
$\left(\int_\Omega |f|^s dx\right)^{\frac{r}{s}} \left(\int_\Omega \mathbb{1}_\Omega dx\right)^{\frac{s-r}{s}} = \left(\|f\|_{L^s(\Omega)}\right)^r \left(\lambda_n(\Omega)\right)^{\frac{s-r}{s}} < \infty$. $\boxed{2}$ D'où $f \in L^r(\Omega)$ et

$\|f\|_{L^r(\Omega)} = N_r(f) = \left(\int_\Omega |f|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\left(\|f\|_{L^s(\Omega)}\right)^r \left(\lambda_n(\Omega)\right)^{\frac{s-r}{s}}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\lambda_n(\Omega)\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} \|f\|_{L^s(\Omega)}$. $\boxed{1}$