

Année Académique: 2025/2026

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques Appliquées

Niveau: Master 1

Matière: Statistique Inférentielle

Période: Semestre 2

Section/Groupe: Section

PV des Notes des Examens par Matière

#	Matricule	Note Examen
1	222234041409	4.0
2	18114010360	3.0
3	25064002839	7.75
4	212134001145	14.0
5	212134003011	8.0
6	18125015915	7.5
7	222234018509	16.75
8	202034008679.	
9	222234036014	10.5
10	191934054701	
11	25084006977	
12	222234057213	7.0
13	222234031004	9.75
14	212134004500	
15	25114002087	
16	222234069719	17.75
17	222234021801	12.75
18	222234036901	16.0
19	222234030217	10.25
20	222234036808	2.5
21	25054002947	
22	212134014232	2.5
23	212134013118	9.75
24	222235165409	
25	202034003285	10.75
26	222234052319	11.75
27	212134006333	
28	161634009559	
29	222234031106	6.25
30	222234016509	8.0
31	25084007967	
32	222236354803	14.5
33	25094037346	3.75
34	25124006373	
35	251334000666	15.5

Signature de l'enseignant: (BOUSAFSAF Issam)

Le: 17/05/2026

Examen Final : Statistique Inférentielle

Exercice 01 : Soit X_1, X_2, \dots, X_n un échantillon aléatoire simple (i.i.d.) suivant une loi Log-normale de paramètres μ et σ^2 . La densité de probabilité pour une observation est donnée par :

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0$$

Où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$.

1. Donnez la structure statistique pour une observation et pour un n -échantillon.
2. Le modèle appartient-il à la famille exponentielle? Justifiez.
3. Donnez une statistique exhaustive pour les deux paramètres (μ, σ^2) .
4. Calculez la fonction de vraisemblance.
5. Si le paramètre μ est connu (fixé μ_0) :
 - (a) Démontrez que la statistique $T = \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \mu_0)^2$ est exhaustive.
 - (b) Cette statistique est-elle minimale?

Exercice 02 : Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon issu d'une population suivant une loi de Rayleigh de paramètre $\sigma > 0$. La densité de probabilité est donnée par :

$$f(x; \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, \quad x \geq 0$$

On rappelle que $E[X^2] = 2\sigma^2$.

1. Le modèle est-il régulier? Justifiez.
2. Calculez la fonction de vraisemblance $L(x; \sigma)$.
3. Calculez le score $S(\sigma)$.
4. Calculez l'information de Fisher $I_n(\sigma)$.
5. Déterminez l'estimateur du Maximum de Vraisemblance $\hat{\sigma}$ de σ .
6. Calculez la divergence de Kullback-Leibler $K(\sigma_0, \sigma_1)$.

Exercice 03 : Soit X une variable aléatoire avec une distribution de probabilité de densité :

$$f(x; a) = \frac{1}{2a\sqrt{x}} e^{-\frac{\sqrt{x}}{a}} \mathbb{I}_{]0, +\infty[}(x)$$

Où $a > 0$. On rappelle que $E[X] = 2a^2$ et $E[\sqrt{X}] = a$.

1. Calculer l'estimateur \hat{a}_1 par la méthode du moments.
2. On pose $\hat{a}_2 = \sqrt{\bar{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$
 - (a) \hat{a}_2 est-il biaisé?
 - (b) \hat{a}_2 est-il convergent?

Correction de l'examen :

Exercice 01 : (07pts)

1. Structure statistique

- Pour une observation : $(]0, +\infty[, \mathcal{B}(]0, +\infty[), \{P_{\theta}, \theta = (\mu, \sigma^2) \text{ tq } \mu \in \mathbb{R} \text{ et } \sigma^2 > 0\})$ (0.5pt)
- Pour l'échantillon : $(]0, +\infty[, \mathcal{B}(]0, +\infty[), \{P_{\theta}, \theta = (\mu, \sigma^2) \text{ tq } \mu \in \mathbb{R} \text{ et } \sigma^2 > 0\})^n$ (0.5pt)

2. Famille exponentielle Oui, en développant le carré dans l'exponentielle, la densité s'écrit sous la forme canonique :

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x)^2 + \frac{\mu}{\sigma^2} \ln x - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \ln x - \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2)\right)$$

On a $d = 2$, et $a_1(x) = (\ln x)^2$, $\alpha_1(\mu, \sigma) = -\frac{1}{2\sigma^2}$, $a_2(x) = (\ln x)$, $\alpha_2(\mu, \sigma) = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $b(x) = -\ln x$, $\beta(\mu, \sigma) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2)$. (2pts)

3. Statistique exhaustive : Les fonctions $a_1(x) = (\ln x)^2$ et $a_2(x) = (\ln x)$ sont continuellement différentiables pour tout $x > 0$, alors la statistique exhaustive pour $\theta = (\mu, \sigma^2)$ est

$$T(X) = \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i, \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2\right) \quad (01pt)$$

4. La vraisemblance La fonction de vraisemblance est :

$$L(x; \mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \mu)^2\right) \quad (01pt)$$

5. Cas $\mu = \mu_0$ connu

a. D'après le théorème de factorisation on a

$$g(T(x); \sigma^2)h(x) = L(x; \mu, \sigma^2),$$

on a

$$g(T(x); \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} T(x)\right), h(x) = \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-1}. \quad (01pt)$$

b. On a

$$T(x) = T(y) \iff \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (\ln y_i - \mu)^2.$$

$$\frac{L(x; \mu, \sigma^2)}{L(y; \mu, \sigma^2)} \iff \frac{\prod_{i=1}^n y_i}{\prod_{i=1}^n x_i} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [(\ln x_i - \mu)^2 - (\ln y_i - \mu)^2]\right).$$

ne dépend pas de σ ssi $T(x) = T(y)$, donc la statistique T est exhaustive minimale. (01pt)

Exercice 02 : (08pts)

1. **Régularité** : Le support est $\Theta =]0, +\infty[$ est un ouvert de \mathbb{R} . Comme le support ne dépend pas du paramètre σ et que la fonction $f(x; \sigma)$ est dérivable trois fois par rapport à σ sur $]0, +\infty[$, le modèle est **régulier**. (01pt)

2. **Vraisemblance** :

$$L(\sigma; x) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma^2} e^{-x_i^2/(2\sigma^2)} = \frac{\prod x_i}{\sigma^{2n}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) \quad (01pt)$$

3. **Score** : La log-vraisemblance est $\ell(\sigma; x) = \sum \ln x_i - 2n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum x_i^2$.

$$S(\sigma; x) = \frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = -\frac{2n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (01pt)$$

4. **Information de Fisher** : Comme le modèle est régulier.

On calcule $\frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2} = \frac{2n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum x_i^2$. Sachant que $E[X^2] = 2\sigma^2$, alors $E[\sum X_i^2] = 2n\sigma^2$.

$$I_n(\sigma) = -E\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2}\right] = -E\left[\frac{2n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum x_i^2\right] = \frac{4n}{\sigma^2} \quad (01,5pt)$$

5. **EMV** : En résolvant $S(\sigma) = 0$:

$$\frac{2n}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^3} \sum x_i^2 \implies \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$\hat{\sigma}_{MV} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2} \quad (02pts)$$

6. **Information de Kullback** : On a

$$\frac{f(x; \sigma_0)}{f(x; \sigma_1)} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^2 e^{\frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x^2}{2\sigma_0^2}}$$

Et comme $E_{\sigma_0} = 2\sigma_0^2$

$$K(\sigma_0, \sigma - 1) = E_{\sigma_0} \left[\ln \frac{f(X; \sigma_0)}{f(X; \sigma)} \right] = 2 \ln \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) + \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} - 1 \quad (01,5pts)$$

Exercice 03 : (05pts)

1. Méthode de moments On a

$$m_1 = E(X) = 2a^2, \text{ et } M_1 = \bar{X}$$

$$m_1 = M_1 \iff \hat{a}_1 = \sqrt{\frac{\bar{X}}{2}} \quad (01,5\text{pt})$$

2. (a) Biais

$$\text{On a } \hat{a}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$$

Le biais est

$$B(\hat{a}_2) = E[\hat{a}_2] - a. \quad (01\text{pt})$$

On a

$$E[\hat{a}_2] = E\left[\frac{1}{n} \sum \sqrt{X_i}\right] = E[\sqrt{X}] = a$$

Le biais est $B(\hat{a}_2) = a - a = 0$. L'estimateur est donc **sans biais**. (0,5pt)

2. (b) Convergence On a

$$V(\hat{a}_2) = V\left[\frac{1}{n} \sum \sqrt{X_i}\right] = \frac{1}{n^2} \sum V(\sqrt{X_i}) = \frac{1}{n} V(\sqrt{X_i})$$

et

$$V(\sqrt{X}) = E(x) - E^2(\sqrt{X}) = 2a^2 - a^2 = a^2$$

Alors

$$V(\hat{a}_2) = \frac{a^2}{n}$$

tend vers 0 lorsque n tend vers l'infinie, alors \hat{a}_2 est un estimateur **convergent**. (02pts)