GHORAF Namirmathématiques/Semestre 4/ Probabilités/Groupe 1						
Matricule	Note	Absent	Absence Justifiée	Observation	Section	Groupe
242434018906	6,75				Section	Groupe 1
242434010405	5,75				Section	Groupe 1
242434033710	7,25				Section	Groupe 1
222234063706	6,5				Section	Groupe 1
232334053215	6,75				Section	Groupe 1
242434043814	6,75				Section	Groupe 1
222234036413	5,5				Section	Groupe 1
242434052113	6,75				Section	Groupe 1
232334053202	3,25				Section	Groupe 1
222234063909	4,5				Section	Groupe 1
242434065518	6,5				Section	Groupe 1
232334021514	4,75				Section	Groupe 1
232334008918	7,25				Section	Groupe 1
232334027403	4				Section	Groupe 1
222234090904	6,5				Section	Groupe 1
232334006219	5,75				Section	Groupe 1
212134058418					Section	Groupe 1
232334041315	14,75				Section	Groupe 1
242434034801	4,75				Section	Groupe 1
222234009817	9				Section	Groupe 1
242434079807	5,5				Section	Groupe 1
162434106210	12				Section	Groupe 1
242434072301	5				Section	Groupe 1
242434019717	10				Section	Groupe 1

GHORAF Namirmathématiques/Semestre 4/ Probabilités/Groupe 2						
Matricule	Note	Absent	Absence Justifiée	Observation	Section	Groupe
212134006093					Section	Groupe 2
191934006333					Section	Groupe 2
232334040015	13				Section	Groupe 2
222234040915	7				Section	Groupe 2
232334033113	5,25				Section	Groupe 2
242434079110	10				Section	Groupe 2
232334009204	5				Section	Groupe 2
222234041413	6				Section	Groupe 2
222234069818	4,75				Section	Groupe 2
232334045401	5,25				Section	Groupe 2
232334058919	10				Section	Groupe 2
232334020715	15				Section	Groupe 2
232334059002	11				Section	Groupe 2
222234020205	2,75				Section	Groupe 2
232334059001	12				Section	Groupe 2
232434096908	5,5				Section	Groupe 2
232334059201	11				Section	Groupe 2
212134001243					Section	Groupe 2
232334044419	10				Section	Groupe 2
242434021716					Section	Groupe 2
232334053205					Section	Groupe 2
242434070301	9				Section	Groupe 2

GHORAF Namir/mathématiques/Semestre 4/ Probabilités/Section						
Matricule	Note	Absent	Absence Justifiée	Observation	Section	Groupe
242434018906	0,75					Section/Groupe 1
242434010405	1,25					Section/Groupe 1
242434033710	3					Section/Groupe 1
222234063706	0,25					Section/Groupe 1
232334053215	4,75					Section/Groupe 1
242434043814	6					Section/Groupe 1
222234036413	1					Section/Groupe 1
242434052113	4,75					Section/Groupe 1
232334053202	1,5					Section/Groupe 1
222234063909	4,75					Section/Groupe 1
242434065518	0,25					Section/Groupe 1
232334021514	1,75					Section/Groupe 1
232334008918	1,75					Section/Groupe 1
232334027403	5,5					Section/Groupe 1
222234090904	1,5					Section/Groupe 1
232334006219	0,5					Section/Groupe 1
212134058418						Section/Groupe 1
232334041315						Section/Groupe 1
242434034801						Section/Groupe 1
222234009817	1,75					Section/Groupe 1
242434079807	2					Section/Groupe 1
162434106210	15					Section/Groupe 1
242434072301	4					Section/Groupe 1
242434019717	1					Section/Groupe 1
212134006093						Section/Groupe 2
191934006333						Section/Groupe 2
232334040015	16,5					Section/Groupe 2
222234040915	5,5					Section/Groupe 2

232334033113	8,5					Section/Groupe 2
242434079110	10					Section/Groupe 2
232334009204	9,5					Section/Groupe 2
222234041413	12					Section/Groupe 2
222234069818	0,5					Section/Groupe 2
232334045401	7,5					Section/Groupe 2
232334058919	11,5					Section/Groupe 2
232334020715	6					Section/Groupe 2
232334059002	7					Section/Groupe 2
222234020205	0,25					Section/Groupe 2
232334059001	3,25					Section/Groupe 2
232434096908	2,25					Section/Groupe 2
232334059201	5,25					Section/Groupe 2
212134001243						Section/Groupe 2
232334044419	4					Section/Groupe 2
242434021716						Section/Groupe 2
232334053205						Section/Groupe 2
242434070301	12,5					Section/Groupe 2

2ème année Maths LMD (S4) **Le 13/06/2026**

Contrôle en Proba-stat

Exercice 1. *Une entreprise produit des pièces. La probabilité qu'une pièce présente un défaut est égale à* 0,1. *On prélève des pièces dans cette production, successivement et avec remise, jusqu'à l'obtention de* 5 *pièces présentent des défauts. On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de tirages nécessaires.*

1. Donnez $X(\Omega)$ et la loi de probabilité de la v.a. X ? $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$. ?
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait 5 tirages ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 6 tirages ?
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus 7 tirages ?.

Exercice 2. *α est un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} \alpha t^{-\alpha-1} & si\ t \in [1, +\infty[\\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Montrer que f est une densité de probabilité.*

2. *X est une variable aléatoire réelle admettant pour densité f*

a) Trouver la fonction de répartition F_X de X.

b) X possède-t-elle une espérance ? Si oui la calculer. Même chose pour la variance.

c) $Y = \ln X$. Trouver la fonction de répartition F_Y de Y.

Exercice 3. ***Q1*** *Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité $f(x)$ donnée par :* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -\ln x & si\ x \in]0, 1] \\ 0 & sinon \end{cases}$.

1- Montrer que f est une densité de probabilité. 2- Calculer $\mathbb{E}(X)$ et la variance $V(X)$.

Q2 *Donner les conditions pour que $f_a : x \to ae^{-|x|} \ln(1 + e^{|x|})$ soit une densité de probabilité, si X est une variable aléatoire de densité f_a. X admet-elle une espérance ?*

Bonne chance

2ème année Maths (S4).

Corrigé type Contrôle en Probabilité 2026

Exercice 1. ***7 points***

- Probabilité de défaut (succès dans les tirages avec remise) : $p = 0.1$.
- Indépendance des tirages (les tirages avec remise)
- On tire jusqu'à l'obtention de $r = 5$ pièces défectueuses.
- X : nombre total de tirages nécessaires.

1. Pour obtenir exactement $r = 5$ succès au n-ième tirage, il faut avoir obtenu exactement $r - 1 = 4$ succès lors des $n - 1$ premiers tirages, puis un succès au n-ième tirage.

- **Support de X :** Le nombre minimum de tirages est 5. Donc : **1 points**

$$X(\Omega) = \{5, 6, 7, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 5\}$$

- **Loi de probabilité :** X suit une **loi binomiale négative** de paramètres $r = 5$ et $p = 0.1$. Pour tout $n \geq 5$: 1 points

$$P(X = n) = C_{n-1}^{r-1} p^r (1-p)^{n-r} = C_{n-1}^{4} (0.1)^5 (0.9)^{n-5}$$

- **Espérance : 0.5 points**

$$E(X) = \frac{r}{p} = \frac{5}{0.1} = 50$$

- **Variance : 0.5 points**

$$V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{5 \times 0.9}{(0.1)^2} = \frac{4.5}{0.01} = 450$$

2. Probabilité d'avoir exactement 5 tirages **1 pts**

Cela correspond au cas où les 5 premières pièces sont toutes défectueuses.

$$P(X = 5) = C_4^4 (0.1)^5 (0.9)^0 = 1 \times 10^{-5} \times 1$$

$$P(X = 5) = 0.00001$$

3. Probabilité d'avoir au moins 6 tirages **1.5 points**

L'événement "au moins 6 tirages" est le complémentaire de "exactement 5 tirages".

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - P(X = 5)$$

$$P(X \geq 6) = 1 - 0.00001 = 0.99999$$

4. Probabilité d'avoir au plus 7 tirages **1.5 points**

On somme les probabilités pour $n = 5, 6, 7$.

$$P(X \leq 7) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$$

Et on a

- $P(X = 5) = 1 \times (0.1)^5 = 0.00001$
- $P(X = 6) = \binom{5}{4}(0.1)^5(0.9)^1 = 5 \times 10^{-5} \times 0.9 = 0.000045$
- $P(X = 7) = \binom{6}{4}(0.1)^5(0.9)^2 = 15 \times 10^{-5} \times 0.81 = 0.0001215$

Donc :

$$P(X \leq 7) = 0.00001 + 0.000045 + 0.0001215 = 0.0001765$$

Exercice 2. ***7 points*** $\alpha > 0,\ f(t) = \begin{cases} \alpha t^{-\alpha-1} & si\ t \in [1, +\infty[\\ 0 & sinon \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité **1.5 points**

Il faut vérifier la positivité et que l'intégrale vaut 1.

1. **Positivité :** Pour $t \geq 1$ et $\alpha > 0$, $t^{-\alpha-1} > 0$, donc $f(t) \geq 0$.
2. **Intégrale :**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{1}^{+\infty} \alpha t^{-\alpha-1} dt = \alpha \left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_1^{+\infty} = -\left[\frac{1}{t^{\alpha}}\right]_1^{+\infty}$$

Comme $\alpha > 0$,

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt = -(0-1) = 1$$

Conclusion : f est bien une densité de probabilité.

2. Étude de la variable aléatoire X de densité f

a) Fonction de répartition F_X **1.5 points**

Pour $x < 1$, $F_X(x) = 0$.

Pour $x \geq 1$:

$$F_X(x) = \int_1^x \alpha t^{-\alpha-1}dt = \left[-t^{-\alpha}\right]_1^x = 1 - x^{-\alpha}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - x^{-\alpha} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) Espérance et Variance

Espérance $E(X)$: 1 points

$$E(X) = \int_1^{+\infty} t \cdot \alpha t^{-\alpha-1}dt = \alpha \int_1^{+\infty} t^{-\alpha}dt$$

Cette intégrale converge si et seulement si $-\alpha < -1$, c'est-à-dire $\alpha > 1$. Si $\alpha > 1$:

$$E(X) = \alpha \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{+\infty} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Si $0 < \alpha \leq 1$, l'espérance est infinie.

$$E(X) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Variance $V(X)$: (1 points) On calcule d'abord $E(X^2) = \int_1^{+\infty} t^2 \alpha t^{-\alpha-1}dt = \alpha \int_1^{+\infty} t^{1-\alpha}dt$. Convergence si $1 - \alpha < -1 \iff \alpha > 2$. Si $\alpha > 2$:

$$E(X^2) = \alpha \left[\frac{t^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_1^{+\infty} = \frac{\alpha}{\alpha - 2}$$

Alors $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\alpha}{\alpha-2} - \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2$. Donc :

$$V(X) = \begin{cases} \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} & \text{si } \alpha > 2 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Variable $Y = \ln X$ **1.5 points**

On cherche $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\ln X \leq y) = P(X \leq e^y)$.

– Si $y < 0$, alors $e^y < 1$, donc $F_X(e^y) = 0$.

– Si $y \geq 0$, alors $e^y \geq 1$, donc $F_X(e^y) = 1 - (e^y)^{-\alpha} = 1 - e^{-\alpha y}$.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-\alpha y} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

Remarque : Y suit une loi exponentielle de paramètre α. **0.5 points**

Exercice 3. ***6 points***

Q1 *:* $f(x) = \begin{cases} -\ln x & \textit{si } x \in]0,1] \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$

1. Vérification de la densité : La fonction $\ln(x)$ est **négative** sur l'intervalle $]0,1]$. Une densité de probabilité doit être positive.

– Positivité : $-\ln x \geq 0$ sur $]0,1]$. OK.

– Intégrale : $\int_0^1 -\ln x \, dx = [-x\ln x + x]_0^1 = (0+1) - (0) = 1$. OK. ....**1 points**

2. Calcul de $E(X)$ et $V(X)$

Espérance : 1 points

$$E(X) = \int_0^1 x(-\ln x)dx = -\int_0^1 x \ln x \, dx$$

Par intégration par parties ($u = \ln x, dv = xdx$) :

$$\int_0^1 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1$$

Donc :

$$E(X) = -\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = -\left((0-\frac{1}{4})-0\right) = \frac{1}{4}$$

Variance : 1 points Calcul de $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2(-\ln x)dx = -\int_0^1 x^2 \ln x\, dx$$

IPP $(u = \ln x, dv = x^2dx)$:

$$\int_0^1 x^2 \ln x dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_0^1$$

$$E(X^2) = -\left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_0^1 = -(0-\frac{1}{9}) = \frac{1}{9}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}$$

Q2 : $f_a(x) = ae^{-|x|}\ln(1+e^{|x|})$

Conditions pour que f_a soit une densité **2 points**

1. **Positivité :** $e^{-|x|} > 0$ et $\ln(1+e^{|x|}) > \ln(1) = 0$. Il suffit que l' **Intégrale égale à 1 :** La fonction est paire.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)dx = 2a\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(1+e^x)dx = 1$$

Calcul de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(1+e^x)dx$. Changement de variable $u = e^{-x} \Rightarrow x = -\ln u, dx = -du/u$. Bornes : $1 \to 0$.

$$I = \int_0^1 u\ln(1+1/u)\frac{du}{u} = \int_0^1 \ln\left(\frac{u+1}{u}\right)du = \int_0^1 (\ln(1+u) - \ln u)du$$

$$\int_0^1 \ln(1+u)du = [(1+u)\ln(1+u) - u]_0^1 = 2\ln 2 - 1$$

$$\int_0^1 -\ln u du = [-u\ln u + u]_0^1 = 1$$

$$I = 2\ln 2 - 1 + 1 = 2\ln 2$$

Donc $2a(2\ln 2) = 1 \Rightarrow 4a\ln 2 = 1. \Rightarrow a = \frac{1}{4\ln 2}$.

Espérance de X..................1 points

La fonction $x \mapsto xf_a(x)$ est **impaire** (car x est impaire et f_a est paire). Si l'intégrale converge absolument, alors $E(X) = 0$. Vérifions la convergence de $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\ln(1+e^x)dx$. Quand $x \to \infty$, $\ln(1+e^x) \approx x$. L'intégrande $\sim x^2e^{-x}$, qui est intégrable. Donc l'espérance existe et vaut :

$$E(X) = 0$$