sciences agronomiques (ingénieur)/Semestre 02/mathématique 2/groupe 1							
Matricule	Note	Absent	Absence Justifiée	Observation	Section	Groupe	
252534009108	15,17				section 1	groupe 1	
252534047301	14,17				section 1	groupe 1	
242434047502	19				section 1	groupe 1	
252534029906	13,46				section 1	groupe 1	
252534005910	12,67				section 1	groupe 1	
252534005713	14,67				section 1	groupe 1	
252534081813	15,75				section 1	groupe 1	
252534082008	16,17				section 1	groupe 1	
252534031818	16,08				section 1	groupe 1	
252534029413	13,58				section 1	groupe 1	
252534035420	15,08				section 1	groupe 1	
252534019518	10,21				section 1	groupe 1	
252531879518	19,58				section 1	groupe 1	
252534007003	18,08				section 1	groupe 1	
252534067509	16,17				section 1	groupe 1	
252534062816	15,08				section 1	groupe 1	
252534031109	15,67				section 1	groupe 1	
252534065308	19				section 1	groupe 1	
252534005905	17,5				section 1	groupe 1	
252534020009	13,58				section 1	groupe 1	
252534064709					section 1	groupe 1	
252534076205	17,58				section 1	groupe 1	
252534051309	7,75				section 1	groupe 1	
242434007413	13,54				section 1	groupe 1	
252534007914	17,38				section 1	groupe 1	

sciences agronomiques (ingénieur)/Semestre 02/mathématique 2/section 1groupe 1								
Matricule	Note	Absent	Absence Justifiée	Observation	Section	Groupe		
252534009108	11					section 1/groupe 1		
252534047301	7,5					section 1/groupe 1		
242434047502	18					section 1/groupe 1		
252534029906	14,5					section 1/groupe 1		
252534005910	10					section 1/groupe 1		
252534005713	17,5					section 1/groupe 1		
252534081813	10					section 1/groupe 1		
252534082008	6					section 1/groupe 1		
252534031818	12					section 1/groupe 1		
252534029413	11					section 1/groupe 1		
252534035420	8					section 1/groupe 1		
252534019518	4					section 1/groupe 1		
252531879518	18					section 1/groupe 1		
252534007003	11,5					section 1/groupe 1		
252534067509	16,75					section 1/groupe 1		
252534062816	13					section 1/groupe 1		
252534031109	16					section 1/groupe 1		
252534065308	15,25					section 1/groupe 1		
252534005905	17					section 1/groupe 1		
252534020009	12,25					section 1/groupe 1		
252534064709	0					section 1/groupe 1		
252534076205	15,5					section 1/groupe 1		
252534051309	9,25					section 1/groupe 1		
242434007413	12,75					section 1/groupe 1		
252534007914	14,75					section 1/groupe 1		

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي
قسم: علوم الطبيعة والحياة والعلوم الدقيقة
السنة الأولى علوم فلاحية
السنة الجامعية: 2025–2026
المقياس: الرياضيات 2

التصحيح النموذجي - الامتحان 2

المدة: 1 ساعة و30 دقيقة -- المجموع: 20 نقطة

ملاحظات التصحيح:

- تُمنح النقاط على صحة المنهجية والنتيجة النهائية.
- خطأ حسابي في مرحلة أولى لا يُعاقب عليه مرتين إذا استُخدمت النتيجة بشكل صحيح في ما يلي.
- في أسئلة الصح/خطأ، التبرير الرياضي إلزامي للحصول على النقطة الكاملة.

التمرين الأول (10 نقاط)

الجزء أ: عمليات على المصفوفات (4 نقاط)

ا) $A+B$ (0.5 نقطة)
نفس الرتبة $2 \times 2 \Rightarrow$ الجمع ممكن.

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 \\ -1+4 & 3-2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

ب) $A+C$ (0.5 نقطة)
A من الرتبة 2×2، C من الرتبة $2 \times 3 \Rightarrow$ **غير ممكن** (رتب مختلفة).

ج) CD (1 نقطة)
$\Rightarrow C_{2\times 3} \times D_{3\times 2}$ النتيجة 2×2.

$$CD = \begin{pmatrix} 1(2)+0(0)+2(4) & 1(1)+0(-1)+2(3) \\ 3(2)+(-1)(0)+1(4) & 3(1)+(-1)(-1)+1(3) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}}$$

د) DC (1 نقطة)
$\Rightarrow D_{3\times 2} \times C_{2\times 3}$ النتيجة 3×3.

$$DC = \begin{pmatrix} 2(1)+1(3) & 2(0)+1(-1) & 2(2)+1(1) \\ 0(1)+(-1)(3) & 0(0)+(-1)(-1) & 0(2)+(-1)(1) \\ 4(1)+3(3) & 4(0)+3(-1) & 4(2)+3(1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & -1 \\ 13 & -3 & 11 \end{pmatrix}}$$

ه) AB (1 نقطة)
$A_{2\times 2} \times B_{2\times 2} \Rightarrow$ ممكن.

$$AB = \begin{pmatrix} 1(0)+2(4) & 1(1)+2(-2) \\ -1(0)+3(4) & -1(1)+3(-2) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}}$$

الجزء ب: المحدد والمقلوب (6 نقاط)

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

i) حساب $\det(M)$ (2 نقطة)
نحسب مجموع جداءات الأقطار الرئيسية ناقص مجموع جداءات الأقطار الثانوية:

$$\det(M) = (a\cdot a\cdot a + 1\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 2) - (1\cdot a\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot a + a\cdot 1\cdot 1)$$

$$\det(M) = (a^3+2+4) - (2a+4a+a) = \boxed{a^3-7a+6}$$

ii) قيم a التي تجعل M قابلة للعكس (1.5 نقطة)
M قابلة للعكس $\det(M) \neq 0 \iff$.
نحل $a^3-7a+6=0$. بالتجريب نجد $a=1$ جذر، فنحلل كثير الحدود:

$$a^3-7a+6 = (a-1)(a^2+a-6) = (a-1)(a-2)(a+3)$$

إذن:

$$\boxed{M \text{ قابلة للعكس} \iff a \notin \{-3, 1, 2\}}$$

iii) حساب M^{-1} عندما $a=0$ (2.5 نقطة)
نعوض $a=0$: $\det(M) = 0^3 - 0 + 6 = 6 \neq 0$، إذن المصفوفة قابلة للعكس.
المصفوفة تصبح:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

نحسب مصفوفة المرافقات $\mathrm{com}(M)$:

$$\mathrm{com}(M) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

نأخذ المنقول ثم نضرب في $\frac{1}{\det}$:

$$M^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}}$$

التمرين الثاني (5 نقاط)

الجملة الخطية:

$$\begin{cases} mx + y + 2z = 6 \\ x + my + 2z = 3 \\ x + 2y + mz = 2 \end{cases}$$

ا) **شرط وجود حل وحيد** (2 نقطة)
مصفوفة المعاملات A لها نفس بنية M مع استبدال a بـ m، إذن محددها:

$$\Delta = m^3 - 7m + 6 = (m-1)(m-2)(m+3)$$

الجملة تقبل حلاً وحيداً $\Delta \neq 0 \iff$:

$$\boxed{m \notin \{-3, 1, 2\}}$$

ب) **حل الجملة عندما $m = 0$** (3 نقاط)
بما أن $0 \notin \{-3, 1, 2\}$، نطبق قاعدة كرامر مباشرة عند $m = 0$. نحسب المحددات الجزئية بطريقة الأقطار:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 4 + 12) - (0 + 24 + 0) = 16 - 24 = -8$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 12 + 4) - (6 + 0 + 0) = 16 - 6 = 10$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (0 + 3 + 12) - (0 + 6 + 0) = 15 - 6 = 13$$

والمحدد الرئيسي عند $m = 0$ هو: $\Delta = 0^3 - 0 + 6 = 6$. إذن الحل العددي هو:

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{13}{6}}$$

التمرين الثالث (2 نقطة)

أ) **صحيح** (1 نقطة)

التبرير: عندما يكون محدد مصفوفة المعاملات غير معدوم، فإن المصفوفة قابلة للعكس والجملة $AX = B$ تملك حلاً وحيداً يُعطى بصيغ كرامر.

ب) **صحيح** (1 نقطة)

التبرير: الجملة غير المتجانسة $AX = B$ لا تقبل حلاً وحيدًا عندما $\det(A) = 0$، لأنه في هذه الحالة إما أن الجملة لا تقبل أي حل، أو تقبل عددًا لا نهائيًا من الحلول.

التمرين الرابع (2 نقطة)

تعريف التطبيق الخطي:

ليكن E و F فضاءين متجهيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$. التطبيق $f : E \to F$ يُسمى **خطياً** إذا تحقق الشرطان:

١) $\forall u, v \in E,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$

٢) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$

أو بشكل مكافئ:

$$\boxed{\forall u, v \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)}$$

نهاية التصحيح النموذجي