Corrigé

Solution 1 (7 pts)

1. Formulation du problème en coordonnées polaires

Le problème demande de trouver une fonction $u(x,y)$ harmonique à l'intérieur du disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 6\}$ et qui vérifie la condition aux limites $u(x,y) = y + y^2$ sur la frontière du disque (le cercle d'équation $x^2+y^2 = 6$) : 0,25

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \qquad x^2+y^2<6, &(1)\\ u(x,y) &= y+y^2 \qquad x^2+y^2=6. &(2)\end{aligned}$$

Le rayon du disque D est $a = \sqrt{6}$. En passant aux coordonnées polaires : 0,5

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

l'équation (1) s'écrit :

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \qquad 0<r<\sqrt{6},\ 0\le\theta<2\pi. \tag{3}$$

2. Méthode de séparation des variables

En cherchant des solutions de la forme $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, l'équation (3) se sépare et donne naissance à deux équations différentielles ordinaires : 0,5

$$\begin{aligned} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) &= 0,\\ r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) &= 0.\end{aligned}$$

Pour que la solution soit physiquement acceptable (fonction univoque), $\Theta(\theta)$ doit être périodique de période 2π, 0,5

ce qui impose $\lambda = n^2$ avec $n \in \mathbb{N}$. 1

Les solutions pour Θ correspondantes à ces valeurs de λ sont donc

$$\Theta_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta).$$

L'équation radiale devient l'équation d'Euler 0,5

$$r^2R_n''(r) + rR_n'(r) - n^2R_n(r) = 0,$$

dont la solution générale est

$$\begin{cases} C_nr^n + D_nr^{-n}, & n\ge 1,\\ C_0 + D_0\ln r, & n\ge 0.\end{cases}$$

Puisque la solution doit être régulière (bornée) au centre du disque ($r = 0$), on doit nécessairement poser $D_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. 0,5

Par le principe de superposition, la solution générale s'écrit sous forme de série : 0,5

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right). \tag{4}$$

3. Utilisation de la condition aux limites

Sur le bord du disque, on a $r = \sqrt{6}$. La condition aux limites est :

$$u(\sqrt{6}, \theta) = y + y^2 = \sqrt{6}\sin\theta + (\sqrt{6}\sin\theta)^2 = \sqrt{6}\sin\theta + 6\sin^2\theta.$$

Pour pouvoir identifier les coefficients avec la série de Fourier, nous devons linéariser l'expression $\sin^2\theta$ en utilisant la formule trigonométrique $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$:

$$u(\sqrt{6}, \theta) = \sqrt{6}\sin\theta + 6\left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) = 3 + \sqrt{6}\sin\theta - 3\cos 2\theta$$

D'autre part, l'évaluation de la série (4) en $r = \sqrt{6}$ donne : 2

$$u(\sqrt{6}, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sqrt{6}(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta) + 6(a_2\cos 2\theta + b_2\sin 2\theta) + \dots$$

Par identification directe des coefficients (l'unicité du développement en série de Fourier), on obtient :

- Terme constant : $\dfrac{a_0}{2} = 3$
- Coefficients pour $n = 1$: $\sqrt{6}a_1 = 0 \implies a_1 = 0$ et $\sqrt{6}b_1 = \sqrt{6} \implies b_1 = 1$
- Coefficients pour $n = 2$: $6a_2 = -3 \implies a_2 = -\frac{1}{2}$ et $6b_2 = 0 \implies b_2 = 0$
- Tous les autres coefficients pour $n \geq 3$ sont nuls : $a_n = b_n = 0$.

En remplaçant ces coefficients dans la solution générale (4), on obtient la solution exacte en coordonnées polaires :

$$u(r, \theta) = 3 + r\sin\theta - \frac{1}{2}r^2\cos 2\theta.$$

4. Expression en coordonnées cartésiennes

Pour revenir aux coordonnées cartésiennes, utilisons l'identité $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$:

$$u(r, \theta) = 3 + r\sin\theta - \frac{1}{2}(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta).$$

Puisque $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on remplace directement : 0,75

$$u(x, y) = 3 + y - \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

C'est la réponse finale exprimée dans le système de coordonnées cartésiennes.

(8 pts)

Solution 2 Considérons l'équation de la chaleur unidimensionnelle :

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < 1,\ t > 0. \tag{5}$$

Les conditions aux limites sont :

- Extrémité gauche maintenue à 0° :

$$u(0,t) = 0, \qquad t \geq 0. \tag{6}$$

- Extrémité droite isolée :

$$u_x(1,t) = 0, \qquad t \geq 0.$$

La condition initiale est

$$u(x,0) = g(x) \qquad 0 < x < 1. \tag{7}$$

0,5/1

1. Résolution du problème (5)-(7)

a) Séparation des variables

Cherchons une solution de la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$. En injectant dans l'équation (5), on obtient :

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \implies \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Ceci nous donne deux équations différentielles ordinaires :

$$\begin{aligned} T'(t) + \lambda T(t) &= 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \quad \textit{avec } X(0) = 0 \textit{ et } X'(1) = 0. \end{aligned}$$

0,75/1

b) Résolution du problème de Sturm-Liouville

Pour l'équation en $X(x)$, nous cherchons les valeurs propres λ.

- Si $\lambda \leq 0$, on montre aisément qu'il n'existe pas de solution non triviale satisfaisant les deux conditions aux limites.

0,5/1

- Pour $\lambda > 0$, posons $\lambda = k^2$. La solution générale est $X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$.
- $X(0) = 0 \implies A = 0$.
- $X'(x) = Bk\cos(kx)$. La condition $X'(1) = 0$ impose $Bk\cos(k) = 0$.

Pour une solution non triviale ($B \neq 0$), nous devons avoir $\cos(k) = 0$, ce qui implique :

$$k_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$ 2

Les valeurs propres sont $\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$ et les fonctions propres associées sont :

$$X_n(x) = \sin\left((n + \tfrac{1}{2})\pi x\right).$$

c) <u>Solution sous forme de série</u>

La solution pour la partie temporelle est

$$T_n(t) = e^{-\lambda_n t}.$$ 0,5

Par le principe de superposition, la solution générale est :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 t} \sin\left((n + \tfrac{1}{2})\pi x\right) \tag{8}$$ 0,75

où les coefficients c_n sont déterminés par la condition initiale $u(x,0) = g(x)$ via le calcul intégral :

$$c_n = 2 \int_0^1 g(x) \sin\left((n + \tfrac{1}{2})\pi x\right) dx.$$

2. Comportement asymptotique ($t \to \infty$)

Examinons la limite de $u(x,t)$ lorsque t tend vers l'infini. Considérons le terme général de la série (8) :

$$u_n(x,t) = c_n e^{-\lambda_n t} \sin\left((n + \tfrac{1}{2})\pi x\right)$$

où $\lambda_n = (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2$. Comme $\lambda_n > 0$ pour tout $n \geq 0$, chaque terme de la série (8) contient un facteur exponentiel décroissant $e^{-\lambda_n t}$:

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\lambda_n t} = 0.$$

D'après les propriétés des coefficients de Fourier, si la donnée initiale g est intégrable sur $[0,1]$, alors la suite (c_n) est bornée. Il existe donc une constante $M > 0$ telle que $|c_n| \leq M$ pour tout n. Par conséquent, pour tout $x \in [0,1]$ et $t > 0$, nous avons : 1

$$|u_n(x,t)| \leq |c_n| \, e^{-\lambda_n t} \left|\sin\left((n + \tfrac{1}{2})\pi x\right)\right| \leq M e^{-\lambda_n t},$$

d'où,

$$\lim_{t \to \infty} u_n(x,t) = 0, \qquad \forall x \in [0,1].$$

Par passage à la limite $t \to \infty$ sous le signe $\sum$, il s'ensuit que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t\to\infty} u_n(x,t) = 0, \qquad \forall x \in [0,1]. \qquad (9)$$

Pour justifier rigoureusement ce passage à la limite ($\lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t\to\infty} u_n(x,t)$), il est nécessaire de démontrer la convergence uniforme de la série (8) par rapport à t sur un intervalle de la forme $[t_0, +\infty[$ avec $t_0 > 0$. 0,5

a) Majoration des termes de la série

Soit $t_0 > 0$ arbitraire. D'après ce qui précède, nous avons pour tout $x \in [0,1]$ et $t \geq t_0 > 0$:

$$|u_n(x,t)| \leq Me^{-\lambda_n t_0}.$$

b) Convergence normale et uniforme 1

Posons $M_n = Me^{-\lambda_n t_0}$. La série numérique $\sum M_n$ est une série à termes positifs. Le critère de d'Alembert ou la comparaison avec une série géométrique montre que $\sum M_n$ converge. Puisque $\sup_{x\in[0,1],\, t\geq t_0} |u_n(x,t)| \leq M_n$ et que $\sum M_n < \infty$, la série $\sum u_n(x,t)$ converge normalement, et donc uniformément, sur le domaine $[0,1] \times [t_0, +\infty[$ (M-test de Weierstrass).

c) Passage à la limite sous le signe $\sum$

En vertu du Théorème d'interversion limite-somme pour les séries de fonctions, le passage (9) se trouve justifié.

Interprétation physique : L'extrémité gauche est maintenue à 0° et la droite est isolée. Sans source de chaleur interne, toute l'énergie thermique s'évacue progressivement par $x = 0$, et la barre finit par se refroidir complètement jusqu'à atteindre l'état d'équilibre thermique nul $u = 0$. 0,5

Solution 3 (5 pts)

1. Comparaison de solutions (Principe du maximum) Considérons la différence $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$. Par linéarité de l'équation de la chaleur, w satisfait :

$$w_t - kw_{xx} = 0, \qquad \textit{dans } Q = \{(x,t)\ ;\ a < x < b\ ,\ t > 0\}.$$

Les hypothèses imposent que : 0,5

$$w(x,0) \leq 0\ (x \in [a,b]), \quad w(a,t) \leq 0,\ w(b,t) \leq 0\ (t \geq 0).$$

Étant donné $T > 0$ arbitraire, par le Principe du Maximum, le maximum de w sur le domaine

$$\overline{Q}_T = \{(x,t)\ ;\ a \leq x \leq b\ ,\ 0 \leq t \leq T\}$$

est atteint sur la frontière parabolique

$$\Gamma_T := \overline{Q}_T \setminus Q_T = \{(x,0)\ ;\ a < x < b\} \cup \{(a,t)\ ;\ 0 \le t \le T\} \cup \{(b,t)\ ;\ 0 \le t \le T\}.$$

1,5

Ainsi :

$$\max_{\overline{Q}_T} w = \max_{\Gamma_T} w \le 0 \qquad \text{pour tout } T > 0. \tag{10}$$

Comme T est arbitraire, (10) signifie que $w(x,t) \le 0$ partout, ce qui implique $u(x,t) \le v(x,t)$ pour tout $a \le x \le b$ et tout $t \ge 0$. 0,5

2. Unicité pour le problème périodique (Méthode de l'énergie) Soient u_1, u_2 deux solutions du problème considéré. La différence $w = u_1 - u_2$ satisfait :

$$w_t - k\, w_{xx} = 0, \quad w(0,t) = w(L,t),\ w_x(0,t) = w_x(L,t), \quad w(x,0) = 0.$$

Définissons l'énergie :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L w^2(x,t)\, dx \ge 0.$$

1

On calcule :

$$E'(t) = \int_0^L w\, w_t\, dx = k\int_0^L w\, w_{xx}\, dx = k\big[w\, w_x\big]_0^L - k\int_0^L w_x^2\, dx.$$

Le terme de bord : les conditions périodiques $w(0,t) = w(L,t)$ et $w_x(0,t) = w_x(L,t)$ donnent :

$$k\big[w\, w_x\big]_0^L = k\big[w(L,t)w_x(L,t) - w(0,t)w_x(0,t)\big] = 0.$$

1

Donc :

$$E'(t) = -k\int_0^L w_x^2\, dx \le 0.$$

L'énergie est non croissante et donc

$$E(t) \le E(0) \qquad \forall t \ge 0.$$

Comme $E(0) = \frac{1}{2}\int_0^L [w(x,0)]^2\, dx = 0$ et $E(t) \ge 0$, on conclut $E(t) \equiv 0$, d'où $w \equiv 0$ et par suite $u_1 = u_2$. 0,5