

[illegible]

[illegible]

MAKHLOUF Seddik/mathématiques/Semestre 6/Introduction à la théorie des opérateurs linéaires/Section						
Matricule	Nom	Prénom	Note	Absent	Absence Justifiée	Observation
212134009483			2,5			
212134007340			3			
232334094814			6,5			
232334042409			2,5			
222234067712			5,5			
212134010086			4			
232334057504			6,5			
232334032120			7,5			
222234046713			7			
212134002887			2,5			
232334045014			8			
232334072804			5			
232334008103			12			
232334057517			9			
212234087810			5			
222234008914			5,5			
232334044608			2,5			
212134002923			7			
232334049712			6			
222234057116			6			
232334064012			5			
232334072314			4			
232334015817			5,5			
202034002535			6,5			
232334021802			4,5			
232334068001			4,5			
222234018813			8			
202034007817			٤			
232334046010			4,5			
232334061313			6			
222234084513			5,5			

[illegible]

Contrôle Semestriel (durée : 01h30)

Exercice 1 : (3+3=6 pts)

I- Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$, $(f_n)_n$ est la suite :

$$f_n(t) = \begin{cases} 2^n t^n & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

- a- Vérifier que $(f_n)_n$ est de Cauchy.
- b- L'espace $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ est-il de Banach ?

II- Soit $E = \ell^2(\mathbb{R})$. $(T_n)_{n \geq 1}$ est la suite d'opérateurs linéaires définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$T_n: \ell^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{R}), \quad T_n(x_1, x_2, \dots, x_3, \dots) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ zéros}}, x_1, x_2, \dots).$$

- a- Montrer que $T_n \in \mathcal{L}(E)$ pour tout $n \geq 1$.
- b- Etudier la convergence uniforme de $(T_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 2 : (3+3=6 pts)

Soit A l'opérateur linéaire définie pour $x = (x_n)_{n \geq 1} \in \ell^2(\mathbb{N})$ par :

$$(Ax)_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 1, \\ \frac{x_{n-1}}{n-1} & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

- 1- Montrer que A est compact.
- 2- Déterminer le spectre de A (préciser ces différentes parties).

Exercice 3 : (3+3+2=8 pts)

Soit $E = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. On considère l'opérateur linéaire $T: E \rightarrow E$ défini par :

$$\forall f \in C([0,1]), \forall t \in [0,1], (Tf)(t) = t \int_0^t f(s) ds.$$

- 1) Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$ et calculer $\|T\|$.
- 2) Soit l'opérateur linéaire borné: $S: C([0,1]) \rightarrow R(T)$,
 $f \mapsto Sf = Tf$.
 - a) Montrer que S est bijective.
 - b) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(t) = n t^n, \forall t \in [0,1]$.
 Posons $M = \{Tf_n: n \geq 1\}$. Montrer que M est bornée et que S^{-1} est non borné.
- 3) Montrer que $R(T)$ n'est pas fermée dans $C([0,1])$.

Bon courage

Corrigé

Exercice 01:

I). a). (f_n) est de Cauchy

Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n > m$ on a :

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)| dt = \int_0^1 |2^n t^n - 2^m t^m| dt = \int_0^1 (2^n t^n - 2^m t^m) dt$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{m+1}} < \frac{1}{2^{m+1}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad (1,50)$$

Ainsi (f_n) est de Cauchy dans E .

b). Il est clair que (f_n) converge simplement vers la fonction f :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (0,50)$$

$$\text{De plus : } \|f_n - f\|_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} |2^n t^n - 0| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - 1| dt = \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (0,50)$$

Donc (f_n) converge dans $(E, \|\cdot\|_1)$ vers la fonction f . Cependant $f \notin E$ (discontinuité en $t = \frac{1}{2}$). Ainsi $f \notin E$. 0,50

Par conséquent $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ n'est pas un espace de Banach.

II). a). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est linéaire.

De plus : Pour tout $x = (x_k) \in E$, on a :

$$\|T_n x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |(T_n x)_k|^2 = \sum_{k=1}^n 0^2 + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |(T_n x)_k|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2 \quad (1)$$

Ainsi T_n est borné avec $\|T_n\| = 1$, Pour tout $n \geq 1$. 0,50

b). Convergence uniforme :

Il est évident que (T_n) converge simplement vers l'opérateur nul. 0,50

$$\text{Cependant : } \|T_n - 0\| = \|T_n\| \geq \frac{\|T_n e_n\|}{\|e_n\|} = 1 \quad (0,50)$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - 0\| \neq 0$$

Ainsi (T_n) ne converge pas uniformément. 0,50

Exercice 2: $A: \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$. $A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$

1) A est compact:

Pour tout $N \geq 1$, on définit: $A_N(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_N}{N}, 0, 0, \dots)$
 Alors A_N est de rang fini: $\dim R(A_N) \leq N+1$.

de plus: pour tout $x = (x_k)_k \in \ell^1(\mathbb{N})$ on a:

$$\|(A - A_N)x\|^2 = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{|x_k|^2}{k^2} \leq \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{k=N+1}^{+\infty} |x_k|^2 \leq \frac{1}{(N+1)^2} \|x\|^2$$

Ainsi: $\|A - A_N\| \leq \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

Par conséquent A est une limite d'opérateurs de rang fini
 donc A est compact.

2) Le spectre de A

A étant compact, alors: $0 \in \sigma(A)$ et $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$

chaque $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$: $A \in \mathcal{C}: \exists x \neq 0: Ax = \lambda x$.

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ \frac{x_2}{2} = \lambda x_3 \\ \vdots \\ \frac{x_n}{n} = \lambda x_{n+1} \\ \vdots \end{cases}$$

* si $\lambda \neq 0$: $Ax = \lambda x \Rightarrow \begin{cases} 0 = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ \frac{x_2}{2} = \lambda x_3 \\ \vdots \\ \frac{x_n}{n} = \lambda x_{n+1} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dots = 0$

* si $\lambda = 0$ le système devient: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \neq 0 \\ \vdots \\ x_n \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$

Par conséquent $\sigma_p(A) = \emptyset$.

D'autre part: $R(A) = \{Ax \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^1(\mathbb{N})\}$
 $= \{(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^1(\mathbb{N})\}$

$= \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid y_1 = 0\}$

$R(A)$ n'est pas dense alors $0 \in \sigma_c(A)$

et par conséquent on a:

$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{0\}, \quad \sigma_p(A) = \sigma_c(A) = \emptyset$



Exercice 03: $E = \mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_\infty)$, T est l'opérateur linéaire de E dans E défini par: $(Tf)(t) = t \int_0^t f(s) ds$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall f \in E$.

1). $T \in \mathcal{L}(E)$.

soit $f \in E$, pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$|(Tf)(t)| = \left| t \int_0^t f(s) ds \right| \leq t \int_0^t |f(s)| ds \leq t \int_0^t \|f\|_\infty ds \leq t^2 \|f\|_\infty \quad (0.1)$$

Par passage au "sup" sur $t \in [0,1]$ on obtient: $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.
donc T est borné et $\|T\| \leq 1$. (0.1)

• Pour $f_0 \in E$: $f_0(t) = 1$, $t \in [0,1]$. on a :

$$\|f_0\| = 1 \text{ et } \|Tf_0\| = 1, \text{ car: } |(Tf_0)(t)| = t \int_0^t ds = t^2.$$

$$\text{donc } \|T\| \geq \frac{\|Tf_0\|}{\|f_0\|} = 1 \quad (0.1) \text{ Ainsi } \|T\| = 1.$$

2) $S: E \longrightarrow \mathcal{R}(CT)$
 $f \longmapsto Sf = Tf$.

a). S est bijectif

- S est surjectif: par construction, car l'espace d'arrivée de S est $\mathcal{R}(CT)$. (0.50)

- S est injectif: montrons que $\text{Ker}(S) = \{0\}$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } f \in \text{Ker}(S) \text{ donc } Sf = 0 &\Rightarrow (Sf)(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1]. \\ &\Rightarrow t \int_0^t f(s) ds = 0 \quad \forall t \in [0,1]. \\ &\Rightarrow \int_0^t f(s) ds = 0, \quad \forall t \in [0,1] \\ &\Rightarrow f(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1] \\ &\quad \text{Par continuité en } t_0 = 0 \\ &\Rightarrow f(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1] \\ &\Rightarrow f \equiv 0 \end{aligned}$$

donc $\text{Ker}(S) = \{0\}$ et S est bijectif. (0.10)

b). * $M = \{Tf_n, n \geq 1\}$ avec $f_n(t) = nt^n$, $t \in [0,1]$, $n \geq 1$.

Pour tout $n \geq 1$ on a :

$$\|Tf_n\| = \sup_{t \in [0,1]} |(Tf_n)(t)| = \sup_{t \in [0,1]} t \int_0^t f_n(s) ds = \sup_{t \in [0,1]} t \int_0^t n s^n ds \quad (0.10)$$

$$= \sup_{t \in [0,1]} \frac{n}{n+1} t^{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (0.10)$$

donc M est bornée.

* S^{-1} est non bornée : Par définition: $S^{-1}(Tf_n) = f_n \quad \forall n \geq 1$.
 S^{-1} transforme la partie bornée M d'une partie non bornée, car $\|S^{-1}(Tf_n)\| = \|f_n\| = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ (0.10)
donc S^{-1} est non bornée. (0.10)

3)- $R(T)$ n'est pas fermée:

D'après le Théorème de l'inverse de Banach:

si E et F deux espaces de Banach et $T: E \rightarrow F$
un opérateur linéaire borné, si T est bijectif
alors T^{-1} est borné.

* Ici $\neq$ $S: E \rightarrow R(T)$ avec $\neq$

- S est linéaire borné
- S est bijectif
- S^{-1} est non-borné.
- E un espace de Banach.

et par conséquent $R(T)$ n'est pas de Banach.
autrement dit $R(T)$ n'est pas fermée dans E .

