Mathématiques/Semestre 4/Analyse 4/Groupe 2						
Matricule	Nom	Prénom	Note	Absent	Absence Justifiée	Observation
212134006093						
191934006333						
232334040015			19.5			
222234040915			15.0			
232334033113			18.5			
242434079110			19.5			
232334009204			18.75			
222234041413			15.5			
222234069818			15.38			
232334045401			13.5			
232334058919			16.25			
232334020715			18.0			
232334059002			17.5			
222234020205			12.0			
232334059001			17.5			
232434096908			18.0			
232334059201			16.5			
212134001243						
232334044419			17.5			
242434021716						
232334053205			18.0			
242434070301			18.5			

Mathématiques/Semestre 4/Analyse 4/Groupe 1						
Matricule	Nom	Prénom	Note	Absent	Absence Justifiée	Observation
242434018906			17.75			
242434010405			17.0			
242434033710			18.0			
222234063706			16.25			
232334053215			15.25			
242434043814			15.0			
222234036413			12.25			
242434052113			15.25			
232334053202			10.0			
222234063909			19.25			
242434065518			17.75			
232334021514			17.5			
232334008918			18.5			
232334027403			14.5			
222234090904			13.88			
232334006219			18.25			
212134058418						
232334041315			13.75			
242434034801			13.38			
222234009817			18.75			
242434079807			17.25			
162434106210			19.5			
242434072301			14.75			
242434019717			18.38			

Offre de formation: **mathématiques**

Licence 2ème Année

Période : **Semestre 4**

Matière: **Analyse 4**

Année Bac	Matricule bac	Nom	Prénom	TD	Examen
2020	34007817				
2021	34002923			18	17.5
2021	34009483			18	16.5
2022	34057116			17	12.5
2022	34067712			18	17
2022	34087810				8
2023	34021802			18	17.5
2023	34042409			18	18
2023	34044608			18	17
2023	34046010			18	17
2023	34057517			19	17
2023	34064012			16.5	10
2023	34068001			17	16
2023	34072314			16	13
2023	34072804			18	15.5

Mathématiques/Semestre 4/Analyse 4/Section						
Matricule	Nom	Prénom	Note	Absent	Absence Justifiée	Observation
242434018906			11.0			
242434010405			8.5			
242434033710			11.5			
222234063706			0.5			
232334053215			18.0			
242434043814			12.5			
222234036413			6.0			
242434052113			11.0			
232334053202			8.0			
222234063909			10.0			
242434065518			0.0			
232334021514			8.5			
232334008918			15.0			
232334027403			0.5			
222234090904			7.0			
232334006219			0.5			
212134058418						
232334041315			0.0			
242434034801			0.0			
222234009817			6.0			
242434079807			4.0			
162434106210			16.0			
242434072301			10.0			
242434019717			10.0			
212134006093						
191934006333						
232334040015			13.0			
222234040915			10.0			
232334033113			13.5			
242434079110			13.0			
232334009204			8.5			

222234041413			10.5			
222234069818			6.0			
232334045401			9.5			
232334058919			12.0			
232334020715			9.5			
232334059002			12.0			
222234020205			4.0			
232334059001			16.0			
232434096908			8.5			
232334059201			8.5			
212134001243						
232334044419			9.0			
242434021716						
232334053205			14.0			
242434070301			9.5			

Corrige -type : Analyse 4

Exercice 01.

<table>
<tr><th>Réponse</th><th></th></tr>
<tr><td>

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

</td><td></td></tr>
<tr><td>

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, car quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas.
- Étudions la continuité de f en $(0,0)$.

En utilisant les coordonnées polaires, posons, donc

$$\begin{cases}x=r\cos(\theta)\\ y=r\sin(\theta)\end{cases}\quad r>0,\ \ \theta\in[0,2\pi]\Longrightarrow f(x,y)=f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=r\sin^2(\theta)$$

Par suite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{r\to0}f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$$
$$=\lim_{r\to0}(r\sin^2(\theta))=0.$$

Donc,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0).$$

Donc f est continue en $(0,0)$. D'où f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

</td><td>0.5

0.5

0.5

0.5+0.5</td></tr>
<tr><td>

Les dérivées partielles premières pour $(x,y)\neq(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.\qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

</td><td>0.5+0.5</td></tr>
<tr><td>

Les dérivées partielles premières pour $(x,y)=(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0.\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=1.$$

</td><td>0.5+0.5</td></tr>
<tr><td>

- La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, car produit de fonctions différentiable.
- Étudions la différentiabilité de f en $(0,0)$.

f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-f'_x(0,0)h_1-f'_y(0,0)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0.$$

On a,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-f'_x(0,0)h_1-f'_y(0,0)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_2^2-h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}}{h_1^2+h_2^2}.$$

On utilise les coordonnées polaires, on trouve

$$\begin{cases}h_1=r\cos(\theta)\\ h_2=r\sin(\theta)\end{cases}\quad r>0,\ \ \theta\in[0,2\pi]\quad .$$

Par suite

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_2^2-h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}}{h_1^2+h_2^2}\Longrightarrow\lim_{r\to0}[\varphi(\theta)])\neq0,\quad \theta\in[0,2\pi].$$

Donc f n'est pas différentiable au point $(0,0)$. Alors, f n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

</td><td>0.5

0.5

0.5

0.5

0.5</td></tr>
<tr><td>

Comme f n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^2$, par conséquent elle n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

</td><td>0.5</td></tr>
</table>

Exercice 02.

Réponse	
L'application f est polynomiale en les variables x et y donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$.	0.5
• Les dérivées partielles premières : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 2x.$ $\quad\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 4y.$ • Les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y + 2,$ $\quad\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4,$ $\quad\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x.$	0.5+0.5 0.5+0.5 +0.5
Les points critiques : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy + 2x = 0 \\ x^2 + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(y+1) = 0 \\ x^2 = -4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee y = -1 \\ x^2 = -4y \end{cases}.$ Donc la fonction f possède trois points critiques (0,0) , (-2,-1) , (2,-1) .	 0.5+0.5 +0.5
La nature des points critiques : • Pour le point $(0,0)$ on a $\mathrm{r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2,$ $\quad$ $\mathrm{t} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 4,$ $\quad$ $\mathrm{s} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$ Alors, $\Delta = \mathrm{s}^2 - \mathrm{rt} = 0 - (2 \times 4) = -8 < 0$ et $r > 0.$ Donc, le point donc$(0,0)$ est un minimum local pour f et ce minimum est $f(0,0) = 0.$ • Pour le point (-2,-1) on a $\mathrm{r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-1) = 0,$ $\quad$ $\mathrm{t} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,-1) = 4,$ $\quad$ $\mathrm{s} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,-1) = -4.$ Alors, $\Delta = \mathrm{s}^2 - \mathrm{rt} = 16 - (0 \times 4) = 16 > 0.$ Donc, le point donc (-2,-1) correspond à un point selle ((ni minimum local ni maximum local). • Pour le point (-2,-1) on a $\mathrm{r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-1) = 0,$ $\quad$ $\mathrm{t} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,-1) = 4,$ $\quad$ $\mathrm{s} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,-1) = 4.$ Alors, $\Delta = \mathrm{s}^2 - \mathrm{rt} = 16 - (0 \times 4) = 16 > 0.$ Donc, le point donc (2,-1) correspond à un point selle (ni minimum local ni maximum local).	 0.5 0.5 0.5
Le point $(0,0)$ n'est pas un minimum global. (Justification)	0.5+0.5

Exercice 3.

Réponse	
En posant $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ \quad z = z \end{cases} \quad r > 0 \implies f(x,y,z) \coloneqq f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) = \frac{1}{r}(\cos(\theta) + \sin(\theta)).$	0.5
Pour r, θ et z. De (D) on a, $x^2 + y^2 \leq x \Leftrightarrow 0 < r \leq \cos(\theta)$.	0.5
$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \implies \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.	0.5
$0 \leq z \leq y \implies 0 \leq z \leq r\sin\theta$.	0.5
Donc, $I = \iiint_\Delta (\cos(\theta) + \sin(\theta))\, dr d\theta dz$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \int_0^{\cos(\theta)} \left(\int_0^{r\sin\theta} dz \right) dr\, d\theta$	0.5
On a, $\int_0^{r\sin\theta} dz = r\sin\theta.$	0.5
Donc, $\int_0^{\cos(\theta)} \left(\int_0^{r\sin(\theta)} dz \right) dr$ $= \int_0^{\cos(\theta)} r\sin\theta\, dr = \left[\frac{1}{2} r^2 \sin(\theta)\right]_0^{\cos(\theta)} = \frac{1}{2}\sin(\theta)\cos^2(\theta).$	0.5
Enfin $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta) + \sin(\theta))[\sin(\theta)\cos^2(\theta)] d\theta$ $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos^3(\theta)\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\, d\theta$ $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos^3(\theta)\, d\theta + \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(4\theta)) d\theta$	
$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos^4(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{16}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin(4\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$	0.5+0.5
$= \frac{1}{8}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right).$	1