Université Larbi Ben M'hidi Om El-Bouaghi
Département MI **M1 Mathématiques appliquées**
Matière : Compléments sur l'intégration et les espaces de Lebesgue **2025/2026**

Examen

Durée : 1H et 30m

Exercice 01 [07 points]

Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ une suite d'éléments de $L^{p'}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ telle que :

$$\sup_{j\geq 1} \|\varphi_j\|_{p',\mathbb{R}} < 1, \quad \|\varphi\|_{p',\mathbb{R}} < 1, \quad et \quad \varphi_j \to \varphi \text{ dans } L^1(\mathbb{R}).$$

1. Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim\limits_{j\to\infty} \int g(x)(\varphi_j(x) - \varphi(x))dx = 0$.
2. Soient $g \in C_c(\mathbb{R})$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$ quelconques. Montrer que

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} f\varphi_j dx - \int_{\mathbb{R}} f\varphi dx\Big| \leq \Big|\int_{\mathbb{R}} (f-g)\varphi_j dx\Big| + \Big|\int_{\mathbb{R}} (g-f)\varphi dx\Big| + \Big|\int_{\mathbb{R}} g(\varphi_j - \varphi)dx\Big|, \quad \forall j \geq 1.$$

3. En utilisant la densité de $C_c(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$ montrer que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_j(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx, \forall f \in L^p(\mathbb{R}).$$

4. Montrer que $\lim\limits_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, j^{1/p'} \mathbf{1}_{]0,1/j[}\, dx = 0, \forall f \in L^p(\mathbb{R})$.

Exercice 02 [07 points]

Pour tout $t > 0$ on pose $F(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x} e^{-xt} dx$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-xt} dx$ pour tout $t > 0$.
2. En utilisant l'inégalité $0 \leq 1 - \cos x \leq x^2, \forall x \geq 0$ montrer que
   a. la fonction F est bien définie sur $]0, +\infty[$.
   b. $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 0$.
3. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(t)$ pour tout $t > 0$.
4. En déduire l'expression de $F(t)$ en fonction de t.

Exercice 03 [06 points]

Pour $0 < a < 1$, on pose

$$K(a) = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(ax)}{x(1+x^2)}\, dx.$$

1. Calculer $\displaystyle\int_0^a \frac{x}{1+x^2y^2}\, dy$ pour $x > 0$.
2. Montrer que $K(a) = \displaystyle\int_0^a \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}\, dx\, dy$.
3. Vérifier que pour tout $y > 1$, on a

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} = \frac{1}{1-y^2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+x^2y^2}\right).$$

4. Exprimer $K(a)$ comme intégrale par rapport à y.

- Bon courage -