جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي
قسم الرياضيات والإعلام الآلي

السنة 2 ليسانس رياضيات
السنة الجامعية: 2026/2025

إمتحان في مادة "مدخل إلى الطبولوجيا" - المدّة: 90 دقيقة

ملاحظة: يطلب العناية بتعليل الأجوبة.

تمرين 1: تغيير المسافة على $\mathbb{R}$ (08 نقاط)

نزوِّد مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بمسافتين:

- المسافة الاعتيادية (الإقليدية): $d(x,y) = |x - y|$.
- المسافة المعرفة بـ : $\delta(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

الجزء الأول: دراسة المسافة δ

1. بيّن أنّ δ هي فعلاً مسافة على $\mathbb{R}$.

(تذكير: دالة "الظل العكسي arctan" هي تقابل (bijection) من $\mathbb{R}$ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$).

2. التكافؤ الطبولوجي:

أ) بيّن أن التطبيق المطابق $\mathrm{id} : (\mathbb{R},d) \to (\mathbb{R},\delta)$ (l'application identité) مستمر.

ب) بيّن أن التطبيق العكسي $\mathrm{id}^{-1} : (\mathbb{R},\delta) \to (\mathbb{R},d)$ مستمر أيضاً.

ج) ماذا تستنتج بخصوص الطبولوجيتين المولَّدتين بواسطة المسافتين d و δ ؟

الجزء الثاني: التمام (Complétude)

3. نعتبر المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $x_n = n$.

أ) هل المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كوشية (de Cauchy) بالنسبة للمسافة الاعتيادية d ؟

ب) بيّن أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كوشية بالنسبة للمسافة δ .

(تلميح: استخدم تقارب المتتالية العددية $(\arctan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ في $\mathbb{R}$ الاعتيادي).

ج) هل المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة في الفضاء المتري $(\mathbb{R},\delta)$ ؟

4. هل الفضاء $(\mathbb{R},\delta)$ فضاء تام (complet) ؟ برّر إجابتك.

5. هل المسافتان d و δ متكافئتان (متريا) على $\mathbb{R}$؟ برّر إجابتك.

تمرين 2: طبولوجيا التناظر على $\mathbb{R}$ (12 نقطة)

نعتبر في $\mathbb{R}$ الجماعة $\mathcal{T}$ المكوّنة من جميع الأجزاء G من $\mathbb{R}$ التي تحقق الخاصية:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in G \Rightarrow -x \in G.$$

1. بيّن أن $\mathcal{T}$ طبولوجيا على $\mathbb{R}$.

2. قارن بين الطبولوجيا $\mathcal{T}$ والطبولوجيا الاعتيادية $\mathcal{T}_u$ على $\mathbb{R}$.

3. بيّن أن جماعة المغلقات في $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ هي $\mathcal{T}$ نفسها.

4. عيّن جميع جوارات نقطة كيفية $a \in \mathbb{R}$. استنتج أساسًا لجواراتها. هل الفضاء $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ منفصل؟

5. بيّن أنّ 1 و -1 نهايتان في $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ للمتتالية العددية ذات الحدّ العام $x_n = (-1)^n$ لمّا $n \to +\infty$.

6. عيّن الداخلية والملاصقة والمجموعة المشتقة لجزءٍ كيفي غيرِ خالٍ A من $\mathbb{R}$.

7. طبّق نتائج السؤال السابق على الأجزاء التالية:

$$A_1 = \{0\} \qquad A_2 = \{1\} \qquad A_3 =]1,2[\qquad A_4 = [-3,1]$$

8. نعتبر التطبيق $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف بِ $f(x) = x^2$.

أ) ارسم منحني f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

ب) بيّن أنّ $f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ غير مستمر عند أي نقطة من $\mathbb{R}$.

9. بيّن أنّ الطبولوجيا الأثر لِ $\mathcal{T}$ على $[0, +\infty[$ هي الطبولوجيا الانقطاعية $\mathcal{P}([0, +\infty[)$.

10. نرمز بِ $(\mathbb{R}^2, \sigma)$ لفضاء الجداء لـ $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ مع نفسه.

أ) إذا كان A و B جزءين كيفيين من $\mathbb{R}$، فما هي داخلية وملاصقة $A \times B$ في $(\mathbb{R}^2, \sigma)$ بدلالة داخلية وملاصقة A و B في $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$؟

ب) استنتج داخلية وملاصقة المجموعتين $\{(0,1)\}$ و $[-3,1] \times [0,2]$ في $(\mathbb{R}^2, \sigma)$.

بالتوفيق

Corrigé Détaillé de l'Examen de Topologie

Année universitaire 2025/2026 - Durée : 90 minutes

Exercice 1 : Changement de Métrique (8 points)

Données : $d(x,y) = |x-y|$ et $\delta(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$.

1. **Preuve que δ est une distance (1,5 pts)**

   Il est évident que δ est une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. (0,25)

   - *Séparation :* $\delta(x,y) = 0 \iff \arctan x = \arctan y \iff x = y$ (injectivité de la fonction arctan). (0,5)
   - *Symétrie :* $\delta(y,x) = |\arctan y - \arctan x| = |-(\arctan x - \arctan y)| = \delta(x,y)$. (0,25)
   - *Inégalité triangulaire :*

   $$\begin{aligned} \delta(x,z) = |\arctan x - \arctan z| &= |(\arctan x - \arctan y) + (\arctan y - \arctan z)| \\ &\leq |\arctan x - \arctan y| + |\arctan y - \arctan z| \\ &= \delta(x,y) + \delta(y,z). \qquad (0,5) \end{aligned}$$

2. **Equivalence Topologique (2,25 pts)**

   - La fonction arctan est continue de $\mathbb{R}$ usuel dans lui-même. Donc, si $x_n \to x$ pour la distance d, alors $\arctan(x_n) \to \arctan(x)$. Ceci est équivalent à dire que $|\arctan(x_n) - \arctan(x)| \to 0$, soit $\delta(x_n, x) \to 0$, i.e. $\mathsf{id}(x_n) \to \mathsf{id}(x)$ pour δ. L'application $\mathsf{id} : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, \delta)$ est donc continue. (1)

     Alternative : Comme la fonction arctan est $1-$lipschitzienne de $\mathbb{R}$ usuel dans lui-même, il vient pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

     $$\delta\left(\mathsf{id}(x), \mathsf{id}(y)\right) = \delta(x,y) = |\arctan x - \arctan y| \leq |x-y| = d(x,y)$$

     ce qui signifie que id est également $1-$lipschitzienne de $(\mathbb{R}, d)$ dans $(\mathbb{R}, \delta)$ et par conséquent $\mathsf{id} : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, \delta)$ est continue.

   - Réciproquement, soit x_n telle que $\delta(x_n, x) \to 0$. Alors $\arctan(x_n) \to \arctan(x)$. Par continuité de l'application réciproque (tangente) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on obtient : $\tan(\arctan(x_n)) \to \tan(\arctan(x))$, i.e. $x_n \to x$ ou $\mathsf{id}^{-1}(x_n) \to \mathsf{id}^{-1}(x)$ pour la distance d. L'inverse id^{-1} est donc continu. (0,75)

- **Conclusion :** Puisque id : $(\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, \delta)$ est bijective et bicontinue, c'est un homéomorphisme. Les deux distances définissent la **même topologie**. (0,5)

3. **Etude de la suite $x_n = n$ (2,75 pts)**

   a) Pour d : $d(x_{n+1}, x_n) = |(n+1) - n| = 1 \nrightarrow 0$. La distance entre deux termes consécutifs ne tend pas vers 0, donc la suite n'est **pas de Cauchy** (elle diverge vers $+\infty$). (0,5)

   <u>Alternative</u> : (x_n) n'est pas bornée dans $(\mathbb{R}, d)$, donc elle n'est pa de Cauchy pour d.

   b) Pour δ : La suite numérique $u_n = \arctan(n)$ converge vers $\pi/2$ dans $\mathbb{R}$ usuel. Elle est donc de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$:

   $$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N : \quad |u_n - u_m| < \epsilon.$$

   Or,

   $$|u_n - u_m| = |\arctan(n) - \arctan(m)| = \delta(n, m) = \delta(x_n, x_m).$$

   Par conséquent, (x_n) est de Cauchy pour δ. (1)

   c) Convergence dans $(\mathbb{R}, \delta)$: Supposons que (x_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ pour δ. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(x_n, \ell) = 0$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan(n) = \arctan(\ell)$. Or, on sait que $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$. Par unicité de la limite, on devrait avoir $\arctan(\ell) = \frac{\pi}{2}$. Cependant, l'équation $\arctan(\ell) = \frac{\pi}{2}$ n'admet **aucune solution** dans $\mathbb{R}$ (car l'image de arctan est l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Donc la suite ne converge pas dans $(\mathbb{R}, \delta)$. (1,25)

4. **Complétude** : Un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy y est convergente. Nous avons exhibé une suite $(x_n = n)$ qui est de Cauchy pour δ mais qui ne converge pas dans l'espace. L'espace $(\mathbb{R}, \delta)$ n'est donc **pas complet**. (0,75)

5. **Equivalence Métrique** : Si deux distances sont métriquement équivalentes alors elles ont les mêmes suites de Cauchy (et même complétude). Ici, $(\mathbb{R}, d)$ est complet (théorème fondamental de l'analyse réelle), mais $(\mathbb{R}, \delta)$ ne l'est pas. Elles ne sont **pas métriquement équivalentes**. (0,75)

Exercice 2 : Topologie de la Symétrie sur $\mathbb{R}$ (12 points)

Soit $\tau = \{G \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in G \ : -x \in G\}$.

1. **Preuve que τ est une topologie (1,25 pts)**

   - $\emptyset \in \tau$ (condition vide) et $\mathbb{R} \in \tau$ (car $x \in \mathbb{R} \implies -x \in \mathbb{R}$). (0,25)
   - **Intersection finie :** Soient $G_1, G_2 \in \tau$. Si $x \in G_1 \cap G_2$, alors $x \in G_1$ et $x \in G_2$. Par symétrie, $-x \in G_1$ et $-x \in G_2$, donc $-x \in G_1 \cap G_2$. (0,5)
   - **Réunion quelconque :** Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de τ. Si $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$, alors $\exists i_0 \in I$ tel que $x \in G_{i_0}$. Comme $G_{i_0} \in \tau$, alors $-x \in G_{i_0}$, d'où $-x \in \bigcup G_i$. La réunion appartient donc à τ. (0,5)

2. **Comparaison avec la topologie usuelle τ_u (0,75 pt)**

   - L'intervalle $]1,2[$ est ouvert dans τ_u mais pas dans τ (car $]1,2[$ n'est pas symétrique). Donc $\tau_u \not\subset \tau$. (0,25)
   - La paire $\{-1, 1\}$ est symétrique, donc ouverte dans τ. Or, ce n'est pas un ouvert usuel (les singletons ou ensembles finis ne sont pas ouverts dans $\mathbb{R}$ usuel). Donc $\tau \not\subset \tau_u$. (0,25)

   Conclusion : Les topologies ne sont pas comparables. (0,25)

3. **Les fermés sont les ouverts (0,75 pt)** Soit F un fermé. Alors $F^{\complement}$ est ouvert, c'est-à-dire symétrique. Par suite,

$$\begin{aligned} x \in F \quad &\iff x \notin F^{\complement} \\ &\iff -x \notin F^{\complement} \quad \text{(car } F^{\complement} \text{ est symétrique)} \\ &\iff -x \in F \end{aligned}$$

   Donc F est fermé si et seulement si F est symétrique, ce qui revient à dire que F est ouvert. (0,75)

4. **Voisinages et Séparation (2 pts)**

   - **Voisinages et base de voisinages :** Un ensemble $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a s'il existe un ouvert G tel que $a \in G \subset V$.

     Le plus petit ouvert contenant a est le plus petit ensemble symétrique contenant a, noté S_a.

Si $a = 0$, $S_0 = \{0\}$. Si $a \neq 0$, $S_a = \{a, -a\}$.

Par conséquent, $V \in \mathcal{V}(a) \iff S_a \subset V$, (1)

et le singleton $\{S_a\}$ est une base de voisinages de a. (0,5)

- **Séparation (Hausdorff) :** L'espace n'est **pas séparé**. Contre-emple : Prenons $x = 1$ et $y = -1$. Tout voisinage de 1 contient $\{-1, 1\}$ et tout voisinage de -1 contient $\{-1, 1\}$. Leur intersection n'est jamais vide. (0,5)

5. **Limites de la suite** $x_n = (-1)^n$ **(1 pt)** Par définition, une suite réelle converge vers un réel l si tout voisinage de l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

   La suite (x_n) prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$.

   - Soit V un voisinage de 1. Alors $\{-1, 1\} \subseteq V$. Tous les termes de la suite (x_n) sont dans V. Donc $x_n \to 1$.
   - De même, pour tout voisinage de -1, tous les termes de (x_n) y sont. Donc $x_n \to -1$.

   La suite admet deux limites : 1 et -1. (1)

6. **Intérieur, Adhérence et Dérivé (1,5 pts)**

   - $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert (symétrique) contenu dans A : $\mathring{A} = A \cap (-A)$. (0,5)
   - $\overline{A}$ est le plus petit fermé (symétrique) contenant A : $\overline{A} = A \cup (-A)$. (0,5)
   - A' (ensemble dérivé) : $x \in A'$ ssi tout voisinage de x rencontre $A \setminus \{x\}$.

     Si $x = 0$, $S_0 = \{0\}$, lequel est un voisinage de 0, ne rencontre pas $A \setminus \{0\}$. 0 n'est donc un point d'accumulation d'aucune partie A de $\mathbb{R}$.

     Si $x \neq 0$, $S_x = \{x, -x\}$ constitue une base de voisinages de x. D'où,

     $$x \in A' \iff \Bigg(\underbrace{S_x \setminus \{x\}}_{=\{-x\}} \Bigg) \cap A \neq \varnothing \iff -x \in A.$$

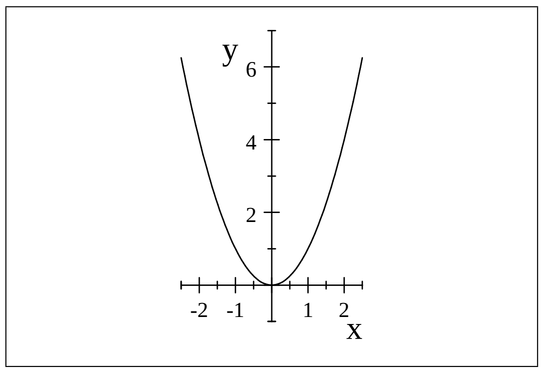
     Ainsi, $A' = \{x \in \mathbb{R}^* \;;\; -x \in A\} = (-A) \cap \mathbb{R}^*$. (0,5)

7. **Applications numériques (1,5 pts)**

Partie	**Intérieur** (0,5)	**Adhérence** (0,5)	**Ensemble dérivé** (0,5)
$A_1 = \{0\}$	$\{0\}$ *(sym)*	$\{0\}$ *(sym)*	$\varnothing$
$A_2 = \{1\}$	$\varnothing$ *(car $-1 \notin A_2$)*	$\{-1, 1\}$	$\{-1\}$
$A_3 =]1, 2[$	$\varnothing$	$]-2, -1[\cup]1, 2[$	$]-2, -1[$
$A_4 = [-3, 1]$	$[-1, 1]$	$[-3, 3]$	$[-1, 3] \setminus \{0\}$

8. **Application $f(x) = x^2$ (1,25 pts)**

   a) Tracé de la parabole : (0,25)



   b) Continuité de $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau)$.

   - $V = \{0\}$ est un voisinage (ouvert) dans $(\mathbb{R}, \tau)$ de $f(0) = 0$ mais $f^{-1}(V) = \{x \mid x^2 = 0\} = \{0\}$ n'est pas un voisinage de 0 pour la topologie usuelle. f n'est **pas continue en** 0. (0,5)
   - Soit a un réel arbitraire non nul. $V = \{a^2, -a^2\}$ est un voisinage dans $(\mathbb{R}, \tau)$ de $f(a) = a^2$ mais $f^{-1}(V) = \{x \mid x^2 \in V\} = \{-a, a\}$ n'est pas un voisinage de a pour la topologie usuelle. f n'est **pas continue en** a. (0,5)

9. **Topologie trace sur** $[0, +\infty[$ **(0,75 pt)**

   Les ouverts traces sont $G \cap \mathbb{R}_+$ où $G \in \tau$. (0,25)

   Tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}_+$ peut s'écrire $A = (-A \cup A) \cap \mathbb{R}_+$. Comme $-A \cup A \in \tau$, toute partie A de $[0, +\infty[$ est ouverte pour la topologie trace $\tau_{[0,+\infty[}$.

   Conclusion : La topologie trace sur $[0, +\infty[$ est la **topologie discrète** $\mathcal{P}([0, +\infty[)$. (0,5)

10. **Espace produit $\mathbb{R}^2$ (1,5 pts)**

a) $A \overset{\circ}{\times} B = \mathring{A} \times \mathring{B}$ et $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. (0,5)

b) Pour $E = \{(0,1)\} = \{0\} \times \{1\}$ et $F = [-3,1] \times [0,2]$, on a

$$\mathring{E} = \{0\} \times \emptyset = \emptyset \quad \text{et} \quad \overline{E} = \{0\} \times \{-1,1\} = \{(0,1),(0,-1)\}, \qquad (0,5)$$

$$\mathring{F} = [-1,1] \times \{0\} \quad \text{et} \quad \overline{F} = [-3,3] \times [-2,2]. \qquad (0,5)$$