Université L.B.M'hidi Oumelbouaghi
Faculté des SESNV
Département : SM

2ème Année Physique

Corrigé de l'examen : Méthodes Numériques et Programmation

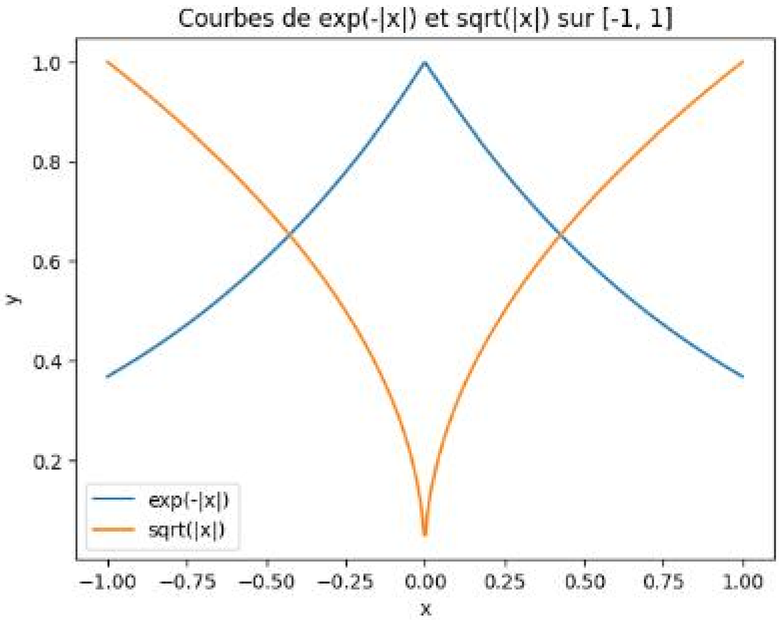
Exercice 1 : *(7pts)*

On souhaite calculer la racine de l'équation : $f(x) = e^{-|x|} - \sqrt{|x|} = 0$

1-le nombre de racines de l'équation *f(x)= 0* dans l'intervalle [-1,1], en écrivant :

$e^{-|x|} = \sqrt{|x|}$ d'après la courbe est égale à 2.

2.0



2- L'algorithme de Newton permettant de résoudre $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

1.0

Dans notre cas $f(x) = e^{-|x|} - \sqrt{|x|}$ et dans l'intervalle [0.25, 0.5] la fonction devient :

$f(x) = e^{-x} - \sqrt{x}$

1.0

Alors l'algorithme devient : $x_{n+1} = x_n + \frac{e^{-x} - \sqrt{x}}{e^{-x} + 1/2\sqrt{x}}$

1.5

3- $x_0 = 0.5 \Rightarrow$

$x_1 = 0.406735$
$x_2 = 0.426091$
$x_3 = 0.426303$

1.5

Donc $r \approx 0.456303$

Exercice 2 : *(7pts)*

Soit l'équation différentielle : :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 2 - e^{-4t} - 2y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \forall\, t \in [0\,,0.5]$$

L'algorithme d'Euler :

$$\begin{cases} y_0 \; donné \\ y_{i+1} = y_i + h\, f(t_i, y_i) \end{cases}$$

1.5

Dans notre exercice :

$f(t, y) = 2 - e^{-4t} - 2y \quad ; \quad a = 0\,;\; b = 0.5\,;\; h = 0.1 \Rightarrow n = 5$ 1.0

Alors :

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{i+1} = y_i + h[2 - e^{-4t} - 2y\,] \end{cases}$$

2.0

A.N. On trouve la solution suivante pour notre ODE :

i	t_i	y_i
0	0.	1.0
1	0.1	0.900000
2	0.2	0.852967
3	0.3	0.837441
4	0.4	0.839834
5	0.5	0.851677

2.5

Exercice 3 : *(6 pts)*

1- Calcul de l'intégrale : $I_1 = \int_{1.25}^{1.75} f(x)dx$ par la méthode de Trapèzes.

L'algorithme de la méthode :

$$I_1 = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right]$$ 1.0

$f(x)$ *donnée* ; $h = 0.25$; $a = 1.25$; $b = 1.75$ => $n = \dfrac{b-a}{h} = 2$

1.0

$$I_1 = \frac{0.25}{2}\left[f(1.25) + f(1.75) + 2f(1.5)\right]$$

$I_1 = 5.722412$ 1.0

2- Calcul de l'intégrale : $I_1 = \int_{1}^{2} f(x)dx$ par la méthode de Simpson.

L'algorithme de la méthode :

1.0

$$S_h = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1(i\ impair)}^{3} f(a+ih) + 2\sum_{i=2(i\ pair)}^{2} f(a+ih)\right]$$

$f(x)$ *donnée* ; $h = 0.25$; $a = 1$; $b = 2$ => $n = \frac{b-a}{h} = 4$

1.0

$$S_h = \frac{h}{3}\left[f(1) + f(2) + 4\big(f(1.25) + f(1.75)\big) + 2(f(1.5))\right]$$

A.N. $S_h = 15.776858$ 1.0

La valeur exacte de l'intégrale : $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^x dx = 1.718283$

L'erreur commise $\Delta = |I - S_h| = 3.5\ 10^{-5}$