

Exercice 01. (7pts). Correction.

① Montrons que F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ (2pts).

i) $(0,0,0) \in F$ car $0+2\cdot 0+0=0$ et $0-0=0 \Rightarrow F \neq \emptyset$. (0.5)

ii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in F: \alpha u + \beta v \in F$.

$$\alpha u + \beta v = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \in F \quad (0.5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2) = 0 \\ \text{et} \\ (\alpha y_1 - \beta y_2) - (\alpha z_1 + \beta z_2) = 0. \end{cases} \quad (0.5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(x_1 + 2y_1 + z_1) + \beta(x_2 + 2y_2 + z_2) = 0 \\ \alpha(y_1 - z_1) + \beta(y_2 - z_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \\ \text{et} \\ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \end{cases} \quad (0.5)$$

d'où $\alpha u + \beta v \in F$.

2) $\text{Vect}(F) = ?$ (2pts)

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0 \text{ et } y - z = 0 \}.$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -3y \text{ et } y = z \}.$$

$$= \{ (-3y, y, y), y \in \mathbb{R} \} = \{ y(-3, 1, 1), y \in \mathbb{R} \}.$$

d'où $\text{Vect}(F) = \{ (-3, 1, 1) \}$.

③ $B(F) = \{ (-3, 1, 1) \}$. $\dim(F) = 1$ (1pt)

④. $u(1, 0, 0) \notin F$ car $x + 2y + z = 1 \neq 0$ (1pt)

Exercice 02: 6 pts.

I). Est-ce que f est dérivable sur $\mathbb{R}$? (2pts)

* On $\forall x \in [1, +\infty[: f(x) = -2x - x^2$ c'est une fonction polynomiale définie continue et dérivable sur leur domaine de définition

$$\text{et } f'(x) = -2 - 2x.$$

* $\forall x \in]-\infty, 1[: f(x) = 3 \cos(\pi x)$ c'est une fonction trigonométrique définie continue et dérivable sur leur domaine de définition et.

$$f'(x) = -3\pi \sin(\pi x).$$

* il reste à étudier la dérivabilité au pts $x = 1 : f(1) = -3$.

$$\lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{n - 1} = \lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{(-2n - n^2) + 3}{n - 1} = \frac{0}{0} \text{ F.I (règle de l'Hôpital)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1^-} -2 - 2x = -4 = f'_-(1) \quad (0,5)$$

$$\lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{n - 1} = \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{3 \cos(\pi x) + 3}{n - 1} = \lim_{n \rightarrow 1^+} -3\pi \sin(\pi x) = 0 = f'_+(1) \quad (0,5)$$

comme $f'_-(1) \neq f'_+(1)$ c'est-à-dire f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ (0,5)

II) ① La dérivée d'ordre n pour $g(x) = \frac{1}{n-1} = (n-1)^{-1}$ (2pts)

$$\text{on a : } g'(x) = -1(n-1)^{-2}$$

$$g^{(2)}(x) = -1 \cdot (-2)(n-1)^{-3} \quad (1)$$

$$g^{(3)}(x) = -1 \cdot (-2)(-3)(n-1)^{-4}$$

$\vdots$

$$g^{(n)}(x) = -1 \cdot (-2)(-3) \dots (-n)(n-1)^{-(n+1)} = (-1)^n n! (n-1)^{-(n+1)}$$

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n n! / (n-1)^{n+1} \quad (1)$$

② déduire que $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! P_n(x)}{(x^2-1)^{n+1}}$ (2pts)

on a: $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$ d'où

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{x-1} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+1} \right)^{(n)} \right] \text{ (1)}$$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \right] = \frac{1}{2} (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right] \\ &= (-1)^n n! \left[\frac{\frac{1}{2} \left[(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1} \right]}{[(x-1)(x+1)]^{n+1}} \right] = (-1)^n n! \frac{\frac{1}{2} \left[(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1} \right]}{(x^2-1)^{n+1}} \end{aligned}$$

Exercice 03: (7pts)

1) Déterminons les réels A, B, C: (3pts)

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C)}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ B+C=3 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=2 \\ C=1 \end{cases} \text{ d'où } f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+1)}$$

② Calcule de $I = \int_0^1 f(x) dx$ (2pts)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \left[\ln|x^2+1| \right]_0^1 + \left[\text{Arctan}(x) \right]_0^1 = \ln(2) + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

③ Calcule du $v = \iint_D 1 dx dy$

$$V = \int_0^1 \int_0^{f(n)} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{f(n)} y dy \right] dx = \int_0^1 y \Big|_0^{f(n)} dx$$

$$= \int_0^1 f(n) dx = \ln(2) + \pi/4.$$

2pts