Corrigé détaillé – Examen M1 Mathématiques appliquées

Compléments sur l'intégration et les espaces de Lebesgue

Exercice 01 (07 points)

Soit $1 \leq p < \infty$ et p' l'exposant conjugué. On suppose que

$$\varphi_j, \varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}), \qquad \sup_{j\geq 1} \|\varphi_j\|_{p'} < 1, \qquad \varphi_j \to \varphi \text{ dans } L^1(\mathbb{R}).$$

1. (2 points)

Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. On a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g(\varphi_j - \varphi) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |g||\varphi_j - \varphi| \leq \|g\|_\infty \|\varphi_j - \varphi\|_1.$$

Comme $\|\varphi_j - \varphi\|_1 \to 0$, on en déduit

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x)(\varphi_j(x) - \varphi(x))\, dx = 0.$$

2. (2 points)

Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in C_c(\mathbb{R})$. On écrit

$$\int f\varphi_j - \int f\varphi = \int (f-g)\varphi_j + \int (g-f)\varphi + \int g(\varphi_j - \varphi).$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left| \int f\varphi_j - \int f\varphi \right| \leq \left| \int (f-g)\varphi_j \right| + \left| \int (g-f)\varphi \right| + \left| \int g(\varphi_j - \varphi) \right|.$$

3. (2 points)

La densité de $C_c(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$ assure que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in C_c(\mathbb{R})$ tel que

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

Par l'inégalité de Hölder,

$$\left| \int (f-g)\varphi_j \right| \leq \|f-g\|_p \|\varphi_j\|_{p'} \leq \|f-g\|_p,$$

et

$$\left| \int (g-f)\varphi \right| \leq \|f-g\|_p \|\varphi\|_{p'} \leq \|f-g\|_p.$$

Le troisième terme tend vers 0 d'après la question 1. Ainsi

$$\limsup_{j\to\infty} \left| \int f\varphi_j - \int f\varphi \right| \leq 2\|f-g\|_p.$$

En faisant tendre $\|f-g\|_p$ vers 0, on conclut que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_j(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\, dx.$$

4. **(1 point)**

Posons

$$\varphi_j(x) = j^{1/p'}\mathbf{1}_{(0,1/j)}(x).$$

On vérifie que $\|\varphi_j\|_{p'} = 1$ et $\varphi_j \rightharpoonup 0$ dans $L^{p'}(\mathbb{R})$.

En appliquant le résultat précédent avec $\varphi = 0$, on obtient

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_j(x)\,dx = 0, \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}).$$

Exercice 02 (07 points)

On considère

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x} e^{-xt}\,dx, \qquad t > 0.$$

1. **(1 point)**

On calcule

$$\int_0^{+\infty} xe^{-xt}\,dx = \left[-\frac{x}{t}e^{-xt}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dx = \frac{1}{t^2}.$$

2. **(2 points)**

Pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq 1-\cos x \leq x^2$, d'où

$$0 \leq \frac{1-\cos x}{x}e^{-xt} \leq xe^{-xt}.$$

La fonction dominante est intégrable, donc F est bien définie. De plus,

$$0 \leq F(t) \leq \frac{1}{t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

3. **(2 points)**

On dérive sous le signe intégral :

$$F'(t) = -\int_0^{+\infty} (1-\cos x)e^{-xt}\,dx.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}dx = \frac{1}{t}, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos x\,dx = \frac{t}{t^2+1}.$$

Ainsi

$$F'(t) = -\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right).$$

4. **(2 points)**

En intégrant $F'(t)$ et en utilisant $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$, on obtient

$$F(t) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right).$$

Exercice 02 (06 points)

On considère $0 < a < 1$ et

$$K(a) = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(ax)}{x(1+x^2)}\, dx.$$

1. (1 point)

Posons $u = xy$. Alors $du = x\, dy$. Lorsque $y = 0$, $u = 0$ et lorsque $y = a$, $u = ax$.

$$\int_0^a \frac{x}{1+x^2y^2}\, dy = \int_0^{ax} \frac{1}{1+u^2}\, du = \arctan(ax).$$

$$\boxed{\int_0^a \frac{x}{1+x^2y^2}\, dy = \arctan(ax)}$$

2. (1,5 point)

D'après la question précédente,

$$\arctan(ax) = \int_0^a \frac{x}{1+x^2y^2}\, dy.$$

Ainsi,

$$K(a) = \int_1^{+\infty} \left(\int_0^a \frac{x}{1+x^2y^2}\, dy \right) \frac{1}{x(1+x^2)}\, dx.$$

On simplifie par x et, la fonction étant positive, on applique le théorème de Fubini :

$$K(a) = \int_0^a \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}\, dx\, dy.$$

3. (1,5 point)

Pour $y > 1$, on cherche A, B tels que

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} = \frac{A}{1+x^2} + \frac{B}{1+x^2y^2}.$$

On obtient : $A = \dfrac{1}{1-y^2}, \quad B = -\dfrac{y^2}{1-y^2}.$

Donc :

$$\boxed{\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} = \frac{1}{1-y^2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+x^2y^2} \right)}$$

4. (2 points)

En remplaçant dans l'intégrale :

$$K(a) = \int_0^a \frac{1}{1-y^2} \left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx - y^2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2y^2}\, dx \right) dy.$$

On a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \quad et \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2y^2}\, dx = \frac{1}{y}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(y) \right).$$

Ainsi :

$$\boxed{K(a) = \int_0^a \frac{1}{1-y^2} \left(\frac{\pi}{4} - y\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(y) \right) \right) dy.}$$