Université Larbi Ben Mhidi d'Oum El Bouaghi

Faculté des sciences exactes, des sciences de la nature et de la vie
Département mathématique et informatique

Contrôle N°1
Mesure et intégration

Exercice 01

Soit $(X,\mathcal{F})$ un espace mesurable. On considère les applications mesurables $f_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

1- Montrer que l'application H définit sur X par $H(x) = g(f_1(x), f_2(x))$ est mesurable.

2- Appliquer le résultat de la question 1, pour montrer la mesurabilité des fonctions : $f_1 + f_2, f_1f_2$.

3- Montrer la mesurabilité de la fonction : f_1^n (Ici $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque). Utilisons le raisonnement par récurrence.

Exercice 02

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue et bornée. On définit pour tout $n \geq 1$ la fonction f_n par

$$\begin{aligned} f_n \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \longmapsto & \ nf(t)\exp(-nt)\chi_{[0,+\infty[} \end{aligned}$$

1- Montrer que la fonction f_n est mesurable et intégrable, pour tout $n \geq 1$.

2- En utilisant un changement de variable convenable de la forme $u = \varphi(t)$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f(0)\exp(-u)du$.

3- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

Exercice 03

Soit $(E,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré. Supposons que $E = \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$, où $(E_n)_n$ est une suite de parties mesurables de E disjoints deux à deux telle que $\mu(E_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.

Soit l'application

$$\begin{aligned} \upsilon \ : \ & \mathcal{F} \to [0,+\infty] \\ A \longmapsto & \ \upsilon(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} \frac{\mu(A \cap E_k)}{\mu(E_k)+1} \end{aligned}$$

1- Montrer que υ est une mesure fnie sur $(E,\mathcal{F})$.

2- Soit $B \in \mathcal{F}$. Montrer que $\upsilon(B) = 0$ si et seulement si $\mu(B) = 0$.

Corrigé Type (Mesure et intégration).

Exercice 01 = (7 pts)

1/ considérons la fonction $F: X \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$

$\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $H(x) = g(f_1(x), f_2(x)) = g(F(x)) = g \circ F(x)$.

- Montrer que F est mesurable de $(X, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$: c.à.d montre que :

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \sigma(\{]-\infty, a_1] \times]-\infty, a_2]) : a_1, a_2 \in \mathbb{R})$$

$$F^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

alors : soient $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, soit $x \in X$ on a :

$$F^{-1}(]-\infty, a_1] \times]-\infty, a_2]) = \{x \in X : F(x) \in]-\infty, a_1] \times]-\infty, a_2]\}$$

$$= \{x \in X : (f_1(x), f_2(x)) \in]-\infty, a_1] \times]-\infty, a_2]\}$$

$$= \{f_1(x) \in]-\infty, a_1] \text{ et } f_2(x) \in]-\infty, a_2]\}$$

$$= \{x \in f_1^{-1}(]-\infty, a_1]) \text{ et } x \in f_2^{-1}(]-\infty, a_2])\}$$

$$= f_1^{-1}(]-\infty, a_1]) \cap f_2^{-1}(]-\infty, a_2]). \quad (0,5)$$

donc $F^{-1}(]-\infty, a_1] \times]-\infty, a_2]) = f_1^{-1}(]-\infty, a_1]) \cap f_2^{-1}(]-\infty, a_2])$. (0,5)

$f_1^{-1}(]-\infty, a_1]) \in \mathcal{F}$ car f_1 mesurable de $(X, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

$f_2^{-1}(]-\infty, a_2]) \in \mathcal{F}$ " f_2 " " " " (0,5)

alors, $F^{-1}(]-\infty, a_1] \times]-\infty, a_2]) \in \mathcal{F}$, alors F mesurable.

d'où $H = g \circ F$ mesurable car g et F mesurable. (0,5)

2/ a) $f_1 + f_2 = g(f_1, f_2)$ avec $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = x + y$ (0,5)

f_1, f_2 mesurables (hypothèse), g est mesurable sur $\mathbb{R}^2$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^2$ (0,5), d'après (1) $f_1 + f_2$ est mesurable (0,5)

b) $f_1 f_2 = g(f_1, f_2)$, avec $g(x, y) = xy$ (0,5)

f_1, f_2 mesurables (hypothèse), g est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc mesurable (0,5)

d'après (1), $f_1 f_2$ est mesurable (0,5)

3) pour $n=1$, $f_1^n = f_1$ est une fonction mesurable (hypothèse). (0,5)

On suppose que f_1^n est mesurable, alors (0,5)

$f_1^{n+1} = f_1^n f_1$ mesurable car f_1 et f_1^n sont mesurables.

le produit de deux fonctions mesurable est mesurable. (1)

Exercice 2 : (7pts) on a : $f_n(x) = n f(t) e^{-nt} \chi_{[0,+\infty[}$.

* $\forall n \in \mathbb{N}^*$: f_n est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc f_n est borélienne sur $\mathbb{R}$ ou bien produit de fonctions mesurables. (0,5)
* f est une fonction positive et bornée alors $\exists M > 0$ tel que $0 \leq f(t) \leq M, \forall t \in \mathbb{R}$. donc

$$|f_n(t)| \leq n M e^{-nt} \chi_{[0,+\infty[} = g(t) \quad (0,5)$$

et $\int_{\mathbb{R}} g(t)\,dt = M \int_0^{+\infty} n e^{-nt}\,dt = M\left[e^{-nt}\right]_0^{+\infty} = M < +\infty$ (0,5)

alors $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$. (0,5)

2/ On considère le changement $u = nt \Rightarrow du = n\,dt$ donc (0,5)

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u}\,du = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u} \chi_{[0,+\infty[}\,du. \quad (0,5)$$

$\forall n \geq 1$: $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u} \chi_{[0,+\infty[} = f\left(\lim_{n\to\infty} \frac{u}{n}\right) e^{-u} \chi_{[0,+\infty[}$ (car f est continue).

$$= f(0) e^{-u} \chi_{[0,+\infty[}. \quad (1)$$

d'autre part : $\left|f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u} \chi_{[0,+\infty[}\right| \leq M e^{-u} \chi_{[0,+\infty[} = G(u) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (1)

d'après T.C.D on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u} \chi_{[0,+\infty[}\,du = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u} \chi_{[0,+\infty[}\,du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(0) e^{-u} \chi_{[0,+\infty[}\,du = \int_0^{+\infty} f(0) e^{-u}\,du. \quad (1)$$

3/ d'après (2) on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(0) e^{-u}\,du = f(0). \quad (1)$$

(6pts)

Exercice 03 : 1/ ϑ est une mesure ?

a)
* $\vartheta(\emptyset) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{\mu(\emptyset \cap E_k)}{\mu(E_k)+1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{\mu(\emptyset)}{\mu(E_k)+1} = 0.$ (0,5)

* si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ disjoints deux à deux, alors

$$\vartheta(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{\mu(\bigcup_n A_n \cap E_k)}{\mu(E_k)+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{\mu[\bigcup_n (A_n \cap E_k)]}{\mu(E_k)+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{-k}}{\mu(E_k)+1} \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n \cap E_k) \quad . (\mu \text{ mesure}).$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} \frac{\mu(A_n \cap E_k)}{\mu(E_k)+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \vartheta(A_n)$$ (1)

b/ $\vartheta(E) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} \frac{\mu(E \cap E_k)}{\mu(E_k)+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} \frac{\mu(E_k)}{\mu(E_k)+1}$

Or $\mu(E_k) \leq \mu(E_k)+1 \Rightarrow \frac{\mu(E_k)}{\mu(E_k)+1} \leq 1$

(0,5)

donc $\vartheta(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$, [la série $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$, série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, est convergente donc. (1)
$\mu(E) < +\infty$].

2/ si $\vartheta(B) = 0 \Rightarrow 2^{-k} \frac{\mu(B \cap E_k)}{\mu(E_k)+1} = 0, \ \forall k \geq 1.$

(0,5)

donc $\mu(B \cap E_k) = 0, \ \forall k \geq 0$ d'autre part, on a :

$\mu(B) = \mu(B \cap E) = \mu(B \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)) \quad (E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)$

$= \mu[\bigcup_{k\geq 1}^{\infty} (B \cap E_k)] = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B \cap E_k) = 0.$ (1)

(3)

* si $\mu(B) = 0 \Rightarrow \mu(B \cap E_k) = 0$ (car $B \cap E_k \subset B$ $\forall k \geq 1$) 0,5 0,5

d'où $\vartheta(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \frac{\mu(B \cap E_k)}{\mu(E_k)+1} = 0$ 0,5