Université Larbi ben M'hidi Oum EL Bouaghi
Département de mathématiques et informatique

**Sotution d'examen : Systèmes dynamiques et introduction au chaos**

Mastre 2. Option : Mathématiques appliquées. Année 2025/2026. Dr Djeddi kamel

## Solution 1.

### 1. Détermination des points fixes

Un point fixe $(x^*, y^*)$ vérifie $x_{n+1} = x_n = x^*$ et $y_{n+1} = y_n = y^*$, soit :

$$\begin{cases} x^* = y^* \\ y^* = -ax^* + by^* - (y^*)^3 + c(x^*)^3 \end{cases}$$

En substituant $y^* = x^*$ dans la seconde équation, on obtient :

$$x^* = -ax^* + bx^* - (x^*)^3 + c(x^*)^3 = (b-a)x^* + (c-1)(x^*)^3.$$

0,25

Ainsi,

$$x^* - (b-a)x^* - (c-1)(x^*)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^*\left[1 - (b-a) - (c-1)(x^*)^2\right] = 0.$$

On en déduit deux cas :
- **Point fixe trivial** : $x^* = 0$ donc $(0,0)$. 0,5
- **Points fixes non triviaux** (si $c \neq 1$) : 0,25

$$1 - b + a - (c-1)(x^*)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^*)^2 = \frac{a-b+1}{c-1}.$$ 0,25

Si $\dfrac{a-b+1}{c-1} > 0$, il existe deux points fixes symétriques : 0,25

$$\left(\sqrt{\frac{a-b+1}{c-1}}, \sqrt{\frac{a-b+1}{c-1}}\right) \quad \text{et} \quad \left(-\sqrt{\frac{a-b+1}{c-1}}, -\sqrt{\frac{a-b+1}{c-1}}\right).$$

0,5 0,5

### 2. Matrice Jacobienne

Le système s'écrit $F(x,y) = (y, -ax + by - y^3 + cx^3)$. La matrice Jacobienne est donnée par :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a + 3cx^2 & b - 3y^2 \end{pmatrix}.$$ 1

### 3. Étude pour $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$

#### a. Points fixes

Calculons :

$$\frac{a-b+1}{c-1} = \frac{2-1+1}{2-1} = 2 > 0.$$ 0,25

Ainsi, les points fixes sont :

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$ 0,25

**b. Stabilité et nature**

La matrice Jacobienne pour ces paramètres est :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2+6x^2 & 1-3y^2 \end{pmatrix}.$$

— **Point fixe** $(0,0)$ :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Polynôme caractéristique : $\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$. Discriminant : $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$. Valeurs propres : $\lambda_1 = \dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}$. Module : $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{2} \approx 1.414 > 1$. **Nature :** Foyer instable. 0,5 0,5

— **Point fixe** $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ :

$$J(\sqrt{2},\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

Polynôme caractéristique : $\lambda^2 + 5\lambda - 10 = 0$. Discriminant : $\Delta = 25 + 40 = 65 > 0$. Valeurs propres : $\lambda_1 = \dfrac{-5+\sqrt{65}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{-5-\sqrt{65}}{2}$. Numériquement : $\lambda_1 \approx 1.531$ et $\lambda_2 \approx -6.531$, 0,5
$>1$ $\to >1$
toutes deux de module $> 1$. **Nature :** point col. 0,5

— **Point fixe** $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ : Par symétrie, $J(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = J(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, donc mêmes valeurs propres et même nature : **point col**. 0,5 0,5

# Solution 2.

## 1. Forme de système d'Ikeda

On pose $z_n = x_n + iy_n$ avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$.
L'application complexe d'Ikeda est donnée par :

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp\left[i\left(\kappa - \frac{p}{1+|z_n|^2}\right)\right]$$

avec $|z_n|^2 = x_n^2 + y_n^2$. On définit :

$$\phi_n = \kappa - \frac{p}{1+|z_n|^2} = \kappa - \frac{p}{1+x_n^2+y_n^2}.$$

Alors :

$$z_{n+1} = A + Bz_n e^{i\phi_n}.$$ 0,5

En utilisant la forme polaire $e^{i\phi_n} = \cos\phi_n + i\sin\phi_n$, et en multipliant par $z_n = x_n + iy_n$, on obtient : 0,5

$$\begin{aligned} z_n e^{i\phi_n} &= (x_n + iy_n)(\cos\phi_n + i\sin\phi_n) \\ &= (x_n\cos\phi_n - y_n\sin\phi_n) + i(x_n\sin\phi_n + y_n\cos\phi_n). \end{aligned}$$

En substituant dans l'expression de $z_{n+1}$ :

$$z_{n+1} = A + B\left[(x_n\cos\phi_n - y_n\sin\phi_n) + i(x_n\sin\phi_n + y_n\cos\phi_n)\right].$$ 1

Comme $A$ est réel, on identifie les parties réelle et imaginaire :

$$\boxed{\begin{cases} x_{n+1} = A + B(x_n \cos\phi_n - y_n \sin\phi_n), \\ y_{n+1} = B(x_n \sin\phi_n + y_n \cos\phi_n), \end{cases}}$$

avec $\phi_n = \kappa - \dfrac{p}{1 + x_n^2 + y_n^2}$.

## 2. Équation pour un point fixe

Un point fixe $z^* = x^* + iy^*$ (ou $(x^*, y^*)$) satisfait $z_{n+1} = z_n = z^*$. Dans le système réel, cela donne :

$$\begin{cases} x^* = A + B(x^* \cos\phi^* - y^* \sin\phi^*), \\ y^* = B(x^* \sin\phi^* + y^* \cos\phi^*), \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \phi^* = \kappa - \frac{p}{1 + (x^*)^2 + (y^*)^2}.$$

0,5

En notation complexe, l'équation du point fixe est :

$$z^* = A + Bz^* e^{i\phi^*}.$$

1,5

[illegible]

prenant le module carré, on obtient une équation implicite pour $|z^*|^2$ :

$$|z^*|^2 = \left|A + Bz^* e^{i\phi^*}\right|^2.$$

## 3. Stabilité

La stabilité d'un point fixe $(x^*, y^*)$ est déterminée par les valeurs propres de la matrice Jacobienne du système réel évaluée au point fixe.

Le système est de la forme :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n), \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= A + B(x \cos\phi - y \sin\phi), \\ g(x, y) &= B(x \sin\phi + y \cos\phi), \\ \phi(x, y) &= \kappa - \frac{p}{1 + x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

La matrice jacobienne $J(x, y)$ est :

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Les dérivées partielles sont calculées en tenant compte de la dépendance de $\phi$ en $x$ et $y$. En posant $R = x^2 + y^2$, on a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2px}{(1+R)^2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{2py}{(1+R)^2}.$$ 0,25

Les expressions complètes des dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = B\left[2\cos\phi - (x\sin\phi + y\cos\phi)\frac{2px}{(1+R)^2}\right],$$ 0,5

$$\frac{\partial f}{\partial y} = B\left[-\sin\phi - (x\sin\phi + y\cos\phi)\frac{2py}{(1+R)^2}\right],$$ 0,5

$$\frac{\partial g}{\partial x} = B\left[\sin\phi + (x\cos\phi - y\sin\phi)\frac{2px}{(1+R)^2}\right],$$ 0,5

$$\frac{\partial g}{\partial y} = B\left[\cos\phi + (x\cos\phi - y\sin\phi)\frac{2py}{(1+R)^2}\right].$$ 0,5

La matrice Jacobienne évaluée au point fixe $(x^*, y^*)$ donne $J(x^*, y^*)$. Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2$ sont obtenues en résolvant :

$$\det(J(x^*, y^*) - \lambda I) = 0.$$

— Si $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, le point fixe est stable. 0,25

— Si au moins une valeur propre vérifie $|\lambda_i| > 1$, le point fixe est instable. 0,25

— Si $|\lambda_i| = 1$ pour au moins une valeur propre, une analyse plus fine est nécessaire (indifferent). 0,25

## Solution 3.

### 1. Points d'équilibre

Les points d'équilibre $(x^*, y^*, z^*)$ sont solutions de $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$.

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\sin(x) - y + z = 0, \\ -z - y = 0. \end{cases}$$

De $z = -y$ et $y = 0$, on obtient $z = 0$. Puis $-\sin(x) = 0$ donne $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Les points d'équilibres sont donc :

$$\boxed{(k\pi, 0, 0), \quad k \in \mathbb{Z}}.$$ 1

### 2. Linéarisation et stabilité des points d'équilibre

La matrice Jacobienne du système est :

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos(x) & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$ 0,5

Évaluée en un point d'équilibre $(k\pi, 0, 0)$, avec $\cos(k\pi) = (-1)^k$ :

$$J_{(k\pi,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(-1)^k & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$ 0,5

Le polynôme caractéristique est :

$$\det(J - \lambda I) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + (2 + (-1)^k)\lambda + (-1)^k = 0.$$ 1

### 3. Fonction de Lyapunov et stabilité de $(0, 0, 0)$

Soit $V(x, y, z) = (1 - \cos x) + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2$.

### Vérification que $V$ est une fonction de Lyapunov

- $V(0, 0, 0) = 0$ 0,5
- $V$ est définie positive car $1 - \cos x \sim x^2/2$ au voisinage de l'origine, donc $V \sim \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$. 0,5
- $\|V(x, y, z)\| \to +\infty$ cas $\|(x, y, z)\| \to +\infty$. 0,5
- Sa dérivée le long des trajectoires est :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z} \\ &= \sin x \cdot y + y \cdot (-\sin x - y + z) + z \cdot (-z - y) \\ &= y \sin x - y \sin x - y^2 + yz - z^2 - yz \\ &= -y^2 - z^2 \leq 0. \end{aligned}$$ 0,5

0,5

Ainsi, $\dot{V}$ est semi-définie négative.

Par le théorème de Lyapunov, l'origine est **stable**. 0,5

Dr. Djeddi Kamel.