Département des sciences de la nature et de la vie

Examen de Biostatistique (Corrigé type)

Correction : EX1 : (5 pts)

1. On a une série à termes positifs. Un équivalent du terme général est $\frac{2n+1}{n^3} \sim \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$. (1)
   Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car son paramètre $\alpha = 2 > 1$

   1. Donc d'après le critère par équivalent $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n^3}$ converge. (0,5)

2. Le terme général de cette série n'est plus toujours positif, mais on peut étudier la convergence absolue. Or

$$\left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$ (1)

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car son paramètre $\alpha = 2 > 1$.

Donc d'après le critère par comparaison $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^2}$ est absolument convergente (0,5)

donc convergente. (0,5)

3. $\lim u_n = 2 \neq 0$ (1) d'où $\sum u_n$ diverge (0,5)

Scanné avec CamScanner

Exercice 4 sur 8 pts

On considère une pièce équilibrée que l'on lance **4 fois**. On note X le nombre de fois où l'on obtient « Pile ».

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n = 4 et p = 1/2 : (1)
X ~ B(4, 1/2)

1. Probabilité de n'obtenir aucun Pile
P(X = 0) = (1/2)^4 = 1/16 ✓ (0,5)

2. Probabilité d'obtenir exactement 2 Piles
P(X = 2) = C(4,2) (1/2)^2 (1/2)^2 = 6/16 = 3/8 ✓ (1)

3. Probabilité d'obtenir au plus 2 Piles
P(X ≤ 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)
P(X ≤ 2) = 1/16 + 1/4 + 3/8 = 11/16 ✓ (1)

4. Espérance mathématique
E(X) = n × p = 4 × 1/2 = 2 (0,5)

Cas d'une pièce truquée
On lance une pièce 5 fois avec p = 0,6.
X ~ B(5, 0,6) ✓ (0,5)

P(X = 0) = 0,01024 (0,5) (0,5)
P(X = 1) = 0,0768
P(X = 2) = 0,2304 (0,5)

P(X ≤ 2) = 0,31744 ✓ (0,5)

Espérance : E(X) = 5 × 0,6 = 3 (0,5)

EX3 : ① $f'(t) = -\frac{1}{5}\, t\,(t^2+3)^{-\frac{3}{2}}$ (2)

② $f'(t) = -12t \sin(2t^2+5)$ (2)

EX2 : $J = \int \frac{-3t}{2(t^2-1)^2}\,dt = -\frac{3}{4}\int 2t(t^2-1)^{-2}\,dt$ ✓ (1)

$= \frac{3}{4}(t^2-1)^{-1} + C$. (0,5)

$I = \frac{1}{3}\int x^2 \ln x\,dx$, On pose $u = \ln x$ et $v' = x^2$

On a donc : $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{1}{3}x^3$. (1)

$I = \frac{1}{3}\int uv' = \frac{1}{3}\left[uv - \int u'v\right] = \frac{1}{3}\left[\ln x \times \frac{x^3}{3}\right] - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}\,dx$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right] + C$ (0,5)

Scanné avec CamScanner