التصحيح النموذجي لامتحان مادة التحليل الدالي 1

ماستر I رياضيات

أسئلة الفهم العام: (5pts)

القضية الأولى: خاطئة (0,25)

يجب أن تكون (T_i) من $\mathcal{L}(E,F)$ (أي مستمرة) (1)

القضية الثانية: خاطئة (0,25)

يجب أن يكون كل من E و F فضاءً نظيميا لباناخ. (1)

القضية الثالثة: خاطئة (0,25)

يجب أن يكون المؤثر معرفا من فضاء باناخ في فضاء باناخ (1)

القضية الرابعة: صحيحة (1,25)

التمرين الأول: (9pts)

مجموعة التطبيقات الخطية المستمرة والقابلة للقلب هي مجموعة مفتوحة (3,5pts)

إذا رمزنا لهذه المجموعة بالرمز M، لدينا

نثبت عنصرا كيفيا y من F، و ليكن التطبيق $B: E \to E$

$$B(x) = A_0^{-1}y - A_0^{-1}\Delta A x$$ (0,5)

حيث A_0 مؤثر خطي مستمر قابل للقلب و $\Delta A \in \mathcal{L}(E,F)$ بحيث:

$$\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}$$

لدينا B هو تقلص، و بالفعل لدينا $\forall x_1, x_2 \in E$:

$$\|B(x_1) - B(x_2)\| = \|A_0^{-1}\Delta A(x_1 - x_2)\| \leq \underbrace{\|A_0^{-1}\Delta A\|}_{<1}.\|x_1 - x_2\|$$ (0,5)

و بما أن E فضاء تام، فإنه حسب نظرية النقطة الثابتة توجد (0,5) (1)

نقطة ثابتة وحيدة هو للتطبيق B تحقق $B(x)=x$

أي أن $x = A_0^{-1}y - A_0^{-1}\Delta A x$

ومنه $A_0 x = y - \Delta A x \Rightarrow y = A_0 x + \Delta A x$ 0,25

$\Rightarrow y = Ax \,/\, A = A_0 + \Delta A$

ومنه فإن A قابل للقلب أي أن 0,5

$\forall y \in F: \exists!\, x \in E: Ax = y.$

ولينا M مفتوحة (2) $\left(\forall A_0 \in M: \exists r>0: B(A_0, r) \subset M\right)$ 0,5

حسب تعريف ΔA فإن: $\Delta A \in B\left(0, \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}\right)$

وعليه

$A = A_0 + \Delta A \in B\left(A_0, \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}\right).$

ولدينا

$B\left(A_0, \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}\right) = \left\{T \in \mathcal{L}(E,F): \|T - A_0\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}\right\}.$

وعليه: $T - A_0 = \Delta A \Leftrightarrow T = A_0 + \Delta A$

ومنه

$\forall A_0 \in M: \exists r = \frac{1}{\|A_0^{-1}\|} > 0:$ 0,25 $B\left(A_0, \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}\right) \subset M.$

ومنه مجموعة التطبيقات الخطية المستمرة القابلة للقلب هي مجموعة مفتوحة.

2 بيان صحة الاستلزام: (3pts)

$$\left[\exists c>0,\ B_F(0,c)\subset T(B_E(0,1))\right] \Rightarrow (T \text{ مفتوح})$$ 0,5

(T مفتوح) $\Leftrightarrow$ (من أجل كل مفتوح U من E فإن صورته $T(U)$ هو مفتوح من F)

لكن U مفتوح من E، وليكن y_0 من $T(U)$ أي أن:

$$\exists x_0\in E:\ Tx_0=y_0$$ 0,25

بما أن U مفتوح من E فإن:

$$\exists r>0:\ B(x_0,r)\subset U \Rightarrow x_0+B(0,r)\subset U$$ 0,25 0,2

ومنه

$$T(x_0)+T(B(0,r))=T(x_0+B(0,r))\subset T(U)$$

أي أن $y_0+T(B(0,r))\subset T(U)$ $\longrightarrow (*)$

من العلاقة $B(0,c)\subset T(B(0,1))$ نستنتج أن

$$B(0,rc)\subset T(B(0,r))$$ 0,2

ومنه من $(*)$ $y_0+B(0,rc)\subset T(U)$

أي أن $B(y_0,rc)$ 0,2

ومنه $\forall y_0\in T(U):\ \exists r_0=rc>0$ 0,1

$$B(y_0,r_0)\subset T(U)$$

ومنه $T(U)$ مفتوح من F وعليه فإن

T مفتوح 0,25

P3

(2.5 pts) .A بيان محدودية المؤثر A **3**

لدينا: $\lim_{n\to+\infty} A_n x = Ax \quad : \forall x \in X$

وعليه من أجل كل x من X فإن $(A_n x)_n$ محدودة أي أن (0.1)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| < \infty , \forall x \in X.$$

وحسب نظرية باناخ شتاينهاوس $(N = I)$ ينتج:

$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$ أي أنه يوجد $M>0$ بحيث (0.1)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|A_n\| \leq M \quad (0.2) \quad (1)$$

وعليه (2) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X : \|A_n x\| \leq \|A_n\| . \|x\|$ (0.1)

من (1) و(2) ينتج

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X : \|A_n x\| \leq M \|x\| \quad (0.2)$$

بإدخال النهاية (وعلماً أن النظيم دالة مستمرة) نحصل (0.1)

$$\lim_{n\to+\infty} \|A_n x\| \leq M \|x\|$$

$$\|Ax\| \leq M \|x\| , \forall x \in X$$

وعليه A محدود.

التمرين الثاني (6pts)

1] ليكن المؤثر T المعرف كما يلي: (3pts)

$$T:\left(C[0,2],\|\cdot\|_\infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Tf(x)=\int_0^2 x^2 f(x)\,dx$$

بيان أن T معرف جيدا:

$$|Tf(x)| = \left|\int_0^2 x^2 f(x)\,dx\right| \le \int_0^2 x^2|f(x)|\,dx$$ 0,25 0,25

$$\le \sup_{x\in[0,2]}|f(x)|\int_0^2 x^2 = \|f\|_\infty \frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$ 0,25 0,25

(1) $$= \frac{8}{3}\|f\|_\infty < \infty$$ 0,25

وعليه T معرف جيدا

2] حساب النظيم: لدينا من (1):

$$\|T\| = \sup_{\|f\|=1}\|Tf\| = \sup_{\|f\|=1}|Tf(x)| \le \frac{8}{3} \quad (*)$$ 0,25 0,25

نأخذ $f_0(x)=1$ ، $\forall x\in[0,2]$ ومنه $\|f_0\|_\infty=1$ 0,25 0,25

ولدينا

$$|Tf(x)| = \left|\int_0^2 x^2(1)\,dx\right| = \frac{8}{3}$$ 0,25

وعليه

$$\|T\| = \sup_{\|f\|=1}\|Tf\| \ge \|Tf_0(x)\| = \frac{8}{3} \quad (**)$$ 0,25

من (*) و(**) نجد:

$$\|T\| = \frac{8}{3}$$ 0,25

P5

2 بيان أن فضاء المتتاليات الحقيقية المحدودة المزودة بنظيم التقارب المنتظم هو فضاء تام: (3pts)

لتكن لدينا متتالية كوشية من الفضاء $\ell^\infty(\mathbb{R})$ نرمز لها بالرمز $(X^m)_{m\geq 1}$ أي أن: 0,1

$$\forall \varepsilon>0, \exists m_0\in\mathbb{N}^*: \forall I,J\geq m_0: \|X^I - X^J\|_\infty < \varepsilon$$

$$\forall I,J\geq m_0: \sup_n |x_n^I - x_n^J| < \varepsilon.$$ 0,1

$$\forall I,J\geq m_0, \forall n\in\mathbb{N}: |x_n^I - x_n^J| < \varepsilon \quad (*)$$

من (*) نستنتج أن المتتالية $(x_n^m)_{m\geq 1}$ (من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$) 0,1
هي متتالية كوشية من $\mathbb{R}$ وهو فضاء تام وعليه
فإن المتتالية $(x_n^m)_{m\geq 1}$ متقاربة:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: \lim_{J\to\infty} x_n^J = x_n$$

P6

بإدخال النهاية على (*) نحصل: 0,1

$$\forall I,J\geq m_0: \forall n\in\mathbb{N}: |x_n^I - x_n| < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0, \exists m_0\in\mathbb{N}^*: \forall I\geq m_0: \sup_n |x_n^I - x_n| \leq \varepsilon \quad (*)$$ 0,1

$$\forall \varepsilon>0, \exists m_0\in\mathbb{N}^*: I\geq m_0: \|X^I - X\| < \varepsilon$$ ~~0,1~~

أي أن (X^m) هي متتالية متقاربة 0,1

ومن (3) نستنتج أن $X\in\ell^\infty(\mathbb{R})$ وعليه $\ell^\infty(\mathbb{R})$ فضاء تام