

Corrigé type de Proh & Stat.

Exercice 01. (08 pts)

1) $S(X) = \{0, 1, 2, \dots, 50\}$ (1)

2) $X = \sum_{i=1}^{50} X_i$ suit la loi

binomiale de paramètre $n=50$
et $p=0,01$.
on peut écrire:

(1) $X \sim B(n=50, p=0,01)$

X_i suit la loi de Bernoulli

de paramètre $p=0,01$.

3) $P(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ (1)

tel que $k \in S(X)$

4) $P(X=3)$ signifie que
la probabilité que le nombre
d'ordinateurs en panne est égale
à 3. (0,5)

$P(X=3) = C_{50}^3 (0,01)^3 (1-0,01)^{47}$

(0,5) $\Rightarrow P(X=3) =$

5) $P(X=0) = C_{50}^0 (1-0,01)^{50}$ (0,5)

6) $P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 P(X=k)$
 $\Rightarrow P(X \leq 3) =$ (1)

Alors: $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$
 $\Rightarrow P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$
 $\Rightarrow P(X \geq 4) =$ (0,5)

7) $E(X) = n \cdot p =$ (1)
 $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) =$ (1)

Exercice 02. (06 pts)

1) on a: $f_x(x) = \lambda e^{-\frac{x}{100}}$, $x \geq 0$
et d'autre part, la ~~fonction~~
densité de la loi exponentielle
est: $f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$
donc:

$\lambda = \frac{1}{100}$ (1)

2^{ème} méthode: $\int_{\mathbb{R}} f_x(x) = 1$

on trouve: $\lambda = \frac{1}{100}$

2) On a $X \sim E(\lambda = \frac{1}{100})$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{100}} \quad x \geq 0 \quad (1)$$

3) $P(50 < X < 150)$

$$= F_X(150) - F_X(50) \quad (1)$$

$$= e^{-\frac{50}{100}} - e^{-\frac{150}{100}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}$$

2^{ème} méthode:

$$P(50 \leq X \leq 150) = \int_{50}^{150} p_X(x) dx$$

4) $P(X \leq 100) = F_X(100)$
 $= 1 - e^{-1} \quad (1)$

5) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 100 \quad (1)$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 100^2 \quad (1)$$

Exercice 03. (06 pts)

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma_X)$$

tel que:

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma_X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 3) \quad (0.5)$

$X_2 \sim \mathcal{N}(0, 2) \quad (0.5)$

$X_3 \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (0.5)$

loi normale centrée réduite

2) On a:

$$\text{Cov}(X_3, X_1) = 0 \quad (0.5)$$

et

X_1 et X_3 sont des v. a. gaussiennes

donc: $X_1 \perp\!\!\!\perp X_3 \dots (1)$

↑
indépendantes

Et on a: $\text{Cov}(X_3, X_2) = 0$

et X_3 et X_2 sont des v. a. gaussiennes, donc: $X_2 \perp\!\!\!\perp X_3 \dots (2)$

D'après (1) et (2):

$$X_3 \perp\!\!\!\perp (X_1, X_2)$$

3) $Y = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2(\mu_Y, \Sigma_Y)$

tel que: $\mu_Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\Sigma_Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4) $Z = X_1 + X_2 + X_3 \sim \mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$

où:

$$\begin{aligned} \mu_Z &= E(Z) = E(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) \\ &= 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_Z^2 = A \Sigma_X A^T$$

tel que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Donc: $Y = AX + B$ donc:

$$\mu_Y = A\mu_X + B$$

$$\Sigma_Y = A \Sigma_X A^t$$

$$\Sigma_Z = A \Sigma_X A^t = (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 8$$

$$5) \quad W = \begin{pmatrix} X_1 + 2X_3 \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + 2X_3 \\ X_1 + X_2 + X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Sigma_X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Sigma_W = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$$W \sim \mathcal{N}_2(\mu_W, \Sigma_W), \text{ où:}$$

$$\mu_W = A \mu_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_W = A \Sigma_X A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_W = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

6)

Donc: $X \perp Y \Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$

Soit:

$\text{Cov}(X, Y) \neq 0 \Rightarrow X \not\perp Y$

Donc: $\text{Cov}(X_1 + 2X_3, Z) = 6 \neq 0 \Rightarrow X_1 + 2X_3 \not\perp Z$