1) **[05 points]** **Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire défini par :** $(p|q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \forall p,q \in \mathbb{R}_2[X]$.

2) **[04 points]** **Soit $P$ le plan d'équation $x+y+z-1 = 0$ et $D$ une droite de vecteur directeur $u(\alpha,\beta,\gamma)$.**

   **Donner une condition sur $\alpha, \beta$ $et$ $\gamma$ pour que $D$ soit parallèle à $P$.**

3) **[03 points]**

**- Donner une définition d'un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$.**

**- Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$.**

**Soient $\mathrm{B, C, D} \in \mathcal{F}$ et $A$ le point de $\mathcal{E}$ vérifiant :** $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 12\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 7\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.

**Montrer que $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$.**

4) **[03 points]** **On considère les deux droites**

$$D : \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = -3\alpha - 1, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x = 3\beta + 2 \\ y = -2\beta \ , \ \beta \in \mathbb{R}. \\ z = \beta + 1 \end{cases}$$

**Déterminer $\mathrm{d}(\mathrm{D}, D')$.**

5) **[05 points]** **On considère la droite $\Delta : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \ , t \in \mathbb{R} \\ z = 2t + 1 \end{cases}$ et le point $A(1,0,1)$.**

**- Déterminer l'équation du plan $P$ passant par $A$ et orthogonal à $\Delta$.**
**- Montrer qu'il existe deux points B et C de $\Delta$ vérifiant $\mathrm{d}(P, B) = \mathrm{d}(P, C) = 3$.**
**- Quelle est le milieu de B et C?**

**Bon courage**

**1) [05 points] Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire défini par :** $(p|q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \forall p,q \in \mathbb{R}_2[X]$.

La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est : $(p_0, p_1, p_2) = (1, x, x^2)$ **(1pt)**

On pose $u_0 = p_0$ et $u_1 = p_1 + \alpha p_0$

$u_0 \perp u_1 \Leftrightarrow (u_0|p_1) + \alpha(u_0, u_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\int_0^1 xdx}{\int_0^1 dx} = -\frac{1}{2}$, **(1,5pt)**

Alors, $u_1 = p_1 + \alpha p_0 = x - \frac{1}{2}$.

On pose $u_2 = p_2 + au_1 + bu_0$.

$$u_0 \perp u_2 \Leftrightarrow (u_0|p_2) + b(u_0, u_0) = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 dx} = -\frac{1}{3}.$$

$$u_1 \perp u_2 \Leftrightarrow (u_1|p_2) + a(u_1, u_1) = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)x^2 dx}{\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx} = -2$$ **(1.5pt)**

$$u_2 = x^2 - 2x + \frac{2}{3}$$

La base cherchée est $\left(\frac{u_0}{||u_0||}, \frac{u_1}{||u_1||}, \frac{u_2}{||u_2||}\right)$ **(1pt)**

**2) [04 points] Soit $P$ le plan d'équation $x + y + z - 1 = 0$ et $D$ une droite de vecteur directeur $u(\alpha, \beta, \gamma)$.**

**Donner une condition sur $\alpha, \beta$ et $\gamma$ pour que $D$ soit parallèle à $P$.**

Un vecteur normal à P est $N \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(1pt)**

P // D $\Leftrightarrow u \perp N$ **(1pt)**

$$u \perp N \Leftrightarrow \left( \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0$$ **(2pt)**

**3) [03 points]**

- Un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ est une partie non vide de $\mathcal{E}$ qui est stable par barycentration. **(1pt)**

- $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 12\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 7\overrightarrow{\mathrm{BD}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB} - 7\overrightarrow{AD} = 0_E$, donc A est le barycentre de points pondérées (C, 1), (B, – 5) et (D, – 7) donc A ∈ $\mathcal{F}$. **(2pt)**

**4) [03 points] On considère les deux droites**

$$D : \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = -3\alpha - 1, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x = 3\beta + 2 \\ y = -2\beta \ , \beta \in \mathbb{R}. \\ z = \beta + 1 \end{cases}$$

**Déterminer d(D, $D'$).**

$$\begin{cases} 2\alpha + 1 = 3\beta + 2 \\ -3\alpha - 1 = -2\beta \\ \alpha + 1 = \beta + 1 \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (-1, 1)$$ **(1pt)**

$D \cap D' = (-1, 2, 0)$ **(1pt)**

d(D, $D'$) = 0 **(1pt)**

**5) [05 points] On considère la droite** $\Delta : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \ , t \in \mathbb{R} \\ z = 2t + 1 \end{cases}$ **et le point** $A(1, 0, 1)$.

- $M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \\ z - 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2z - 4 = 0$ **(2pts)**

- Montrer qu'il existe deux points B et C de Δ vérifiant d($P$, $B$) = d($P$, $C$) = 3.

Soit M(2t+1, – t, 2t+1) ∈ Δ.

d($M$, $P$)=3$\frac{|2(2t+1)-(-t)+2(2t+1)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2\hat{}2}} = 3 \Leftrightarrow t \in \{-1, 1\}$, donc

C(– 1, 1 , – 1 ) et B (3, – 1, 3) **2(pts)**

- Le milieu de B et C est A. **(1pt)**

**Bon courage**