Session normale : Le 12 05 2025

1) [05 points] **Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par :** $F = vect\left\{u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

2) [05 points] **On considère un espace affine Euclidien de dimension 3.**
Soit P le plan d'équation $x - y - z - 1 = 0$ et D une droite de vecteur directeur $u(\alpha, \beta, \gamma)$.

- **a- Donner une condition sur α, β et γ pour que D soit parallèle à P.**
- **b- Déterminer la distance $d(P, D)$ dans le cas où $P // D$ et D contient le point $A(0, 0, 0)$.**

3) [05 points] **Etudier les branches infinies de la courbe suivante :**

$$\gamma(t) = \left(1 + \frac{1}{t}, 1 - \frac{1}{t}\right), t \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

1) [05 points] **Dans un espace affine Euclidien de dimension 3 on considère les deux droites**

$$D : \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = 2\alpha - 1, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -\alpha + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x = \beta + 3 \\ y = -2\beta, \ \beta \in \mathbb{R}. \\ z = \beta + 1 \end{cases}$$

1) Etudier la position relative de D et D'.

2) Déterminer la distance $d(D, D')$.

Bon courage

Corrigé type

4) [05 points] Déterminer une base orthonormée de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par : $F = vect\left\{u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$

$$On\ pose\ v_1 = u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ et\ \ v_2 = u_2 + \alpha v_1.$$

$$v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{(u_2|v_1)}{(v_1|v_1)} = -\frac{1}{2} \quad alors\ v_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$$

(2pts)

.

Soit maintenant $v_3 = u_3 + av_1 + bv_2.$

$$v_3 \perp v_1 \Leftrightarrow a = -\frac{(u_3|v_1)}{(v_1|v_1)} = -\frac{1}{2}.$$

$$v_3 \perp v_2 \Leftrightarrow a = -\frac{(u_3|v_2)}{(v_2|v_2)} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Alors,} \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}\\-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}.$$

(2pts)

La base orthonormée est :

$$(e_1, e_2, e_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix} \right)$$ **(1pt)**

5) [05 points] **Soit P le plan d'équation $x - y - z - 1 = 0$ et D une droite de vecteur directeur $u(\alpha, \beta, \gamma)$.**

c- Donner une condition sur α, β et γ pour que D soit parallèle à P.

$N_P\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ **est un vecteur normal à P.** **(1pt)**

$$P//D \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \alpha = \beta + \gamma.$$ **(2pts)**

d- Détermine la distance $d(P, D)$ dans le cas où $P// D$ et D contient le point $A(0,0,0)$.

Dans ce cas, $d(P, D) = d(A, P) = \frac{|-1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **(2pts)**

6) [05 points] **Etudier les branches infinies de la courbe suivante :**

$$\gamma(t) = \left(1 + \frac{1}{t}, 1 - \frac{1}{t}\right), t \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

- On a $\lim_{t\to-\infty} 1 + \frac{1}{t} = \lim_{t\to-\infty} 1 - \frac{1}{t} = 1.$ **(1pt)**

Il n-y-a pas de branche infinie quand $t \to -\infty$.

- On a $\lim_{t\to0^-} 1 + \frac{1}{t} = -\infty$ **et** $\lim_{t\to0^-} 1 - \frac{1}{t} = +\infty.$ **(1pt)**

On a $\lim_{t\to0^-} \frac{1-\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}} = -1$, **et** $\lim_{t\to0^-} 1 - \frac{1}{t} + \left(1 + \frac{1}{t}\right) = 2.$

On a $\lim_{t\to0^+} 1 + \frac{1}{t} = +\infty$ **et** $\lim_{t\to0^+} 1 - \frac{1}{t} = -\infty.$ **(1pt)**

On a $\lim_{t\to0^+} \frac{1-\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}} = -1$ **et** $\lim_{t\to0^-} 1 - \frac{1}{t} + \left(1 + \frac{1}{t}\right) = 2.$

I y a une asymptote oblique d'équation y = - x + 2 quand $|t| \to +\infty$. **(1pt)**

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} 1+\frac{1}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} 1-\frac{1}{t} = 1.$ **(1pt)**

Il n-y-a pas de branche infinie quand $t \to +\infty$.

7) [05 points] On considère les deux droites

$$D : \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = 2\alpha - 1, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -\alpha + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x = \beta + 3 \\ y = -2\beta\,,\ \beta \in \mathbb{R}. \\ z = \beta + 1 \end{cases}$$

3) Etudier la position relative de D et D'.

$$\begin{cases} -\alpha + 1 = \beta + 2 \\ 2\alpha - 1 = -2\beta \\ -\alpha + 1 = \beta + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\alpha = \beta + 1 \\ -\alpha = \beta - \frac{1}{2} \\ -\alpha = \beta \end{cases}$$

(2pts)

ce qui est impossible, alors $D \cap D' = \phi$.

On remarque que les vecteurs directeurs de D et D' $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

sont liés, Donc D et D' sont strictement parallèles.

4) Déterminer la distance $d(D, D')$.

On a $A(1, -1, 1) \in D$.

Soit P le plan perpendiculaire à D et contenant A, alors

P : $-x + 2y - z + d = 0$.

On remplace par les cordonnée de A on trouve d = 4. **(2pts)**

P : $-x + 2y - z + 4 = 0$.

On cherche le point A' d'intersection de D' et P.

$-(\beta + 3) + 2(-2\beta) - (\beta + 1) + 4 = 0 \Leftrightarrow -6\beta = -1 \Leftrightarrow$ B = 0.

Donc $A'(3, 0, 1)$.

$d(D, D') = AA' = \sqrt{4 + 1 + 0} = \sqrt{5}$. **(1pts)**