Université Larbi Ben M'hidi
Dept. MI

Géométrie Différentielle - L3

Examen Final

4 mai 2025 **Durée : 1h30**

Tous les documents, autres que ceux fournis dans le sujet, sont interdits.[1]

Exercice 1 :

1 1. Montrer que $M = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ n'est pas une sous-variété.

3 2. Démontrer que $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ est une fonction de Morse.

7 3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $S_\alpha = \{x^2 + y^2 + z^2 = xyz + \alpha\}$ est une sous-variété.

Exercice 2 :

Soient S_1 le cône défini par $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, et S_2 le cône défini par $z = 5\sqrt{x^2 + y^2}$. Considérons l'application lisse :

$$f : S_1 \to S_2, \quad f(x, y, z) = (x, y, 5z).$$

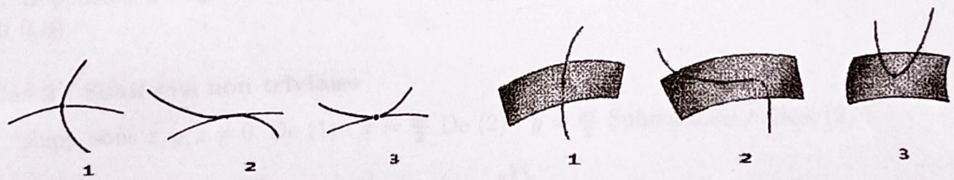
Soit $p = (t, 0, t) \in S_1$ pour $t > 0$.

2 1. Montrer que f est bien définie.

4 2. En utilisant les coordonnées locales, calculer le différentiel df_p en p, appliqué au vecteur tangent $(-1, 1, 0)$.

Exercice 3 :

3 — Pour chaque point d'intersection indiqué dans les figures (a) et (b), Identifiez si l'intersection est transverse ou non.



(a) Courbes dans $\mathbb{R}^2$. (b) Courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^3$.

---

1. Barème : 11-6-3 pts.

Exercice 1

1 $M = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ n'est pas une sous-variété

Posons $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Alors $M = f^{-1}(0)$. Calculons le gradient :

$$\nabla f = (2x, 2y, -2z).$$

1 Le gradient s'annule uniquement à l'origine $(0, 0, 0) \in M$. Ainsi, f n'est pas une submersion en ce point.

L'origine est un point singulier de M, car $M \setminus \{(0, 0, 0)\}$ se décompose en deux composantes connexes ($z > 0$ et $z < 0$), alors qu'une sous-variété de dimension 2 privée d'un point reste localement connexe, (M est un Cône)

2 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ est une fonction de Morse

Définition 2.1 (Fonction de Morse). *Une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est de Morse si tous ses points critiques sont non-dégénérés (i.e., la matrice hessienne est inversible en chaque point critique).*

2.1 Points critiques de f

Les points critiques sont solutions de :

1

$$\begin{cases} 2x - yz = 0 & (1) \\ 2y - xz = 0 & (2) \\ 2z - xy = 0 & (3) \end{cases}$$

Cas 1 : Solution triviale

Supposons $x = y = z = 0$. Alors toutes les équations sont satisfaites. **Point critique :** $(0, 0, 0)$

Cas 2 : Solutions non triviales

Supposons $x, y, z \neq 0$. De (1) : $x = \frac{yz}{2}$ De (2) : $y = \frac{xz}{2}$ Substituons x dans (2) :

$$y = \frac{(yz/2) \cdot z}{2} = \frac{yz^2}{4} \Rightarrow y\left(1 - \frac{z^2}{4}\right) = 0 \Rightarrow z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2$$

Sous-cas 1 : $z = 2$ Alors :

- $x = \frac{y \cdot 2}{2} = y$
- $z = \frac{xy}{2} = \frac{y^2}{2} = 2 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

1 Ainsi, les points critiques sont : $(2, 2, 2)$, $(-2, -2, 2)$, $(2, -2, -2)$ et $(-2, 2, -2)$

2.2 Calcul du hessien

La matrice hessienne de f est :

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & -z & -y \\ -z & 2 & -x \\ -y & -x & 2 \end{bmatrix}$$

En l'origine $(0,0,0)$

$$H_f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(H_f) = 8 \neq 0$$

En $(2,2,2)$

$$H_f(2,2,2) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(H_f) = -32 \neq 0$$

En $(-2,-2,2)$

$$H_f(-2,-2,2) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(H_f) = -32 \neq 0$$

De façon similaire, on trouve :

1

$$\det(H_f(2,-2,-2)) \neq 0, \ et \ \det(H_f(-2,2,-2)) \neq 0.$$

Donc f est une fonction de Morse, car tous ses points critiques sont non-dégénérés.

3 Valeurs de α pour lesquelles $S_\alpha = \{x^2+y^2+z^2 = xyz + \alpha\}$ est une sous-variété

1 Considérons la fonction $f_\alpha(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 - xyz - \alpha$. La différentielle de f_α est donnée par :

1 $$df_\alpha(m) = (2x - yz, 2y - xz, 2z - xy).$$

Le rang de $df_\alpha(m)$ s'annule si et seulement si (x,y,z) appartient à l'ensemble suivant :

2 $$\{(0,0,0), (2,2,2), (-2,-2,2), (-2,2,-2), (2,-2,-2)\}.$$

Par le théorème des sous-variétés de niveau (ou déf. par submersion), $f_\alpha^{-1}(\{0\}) = S_\alpha$ est
2 une sous-variété (de dimension $= 2$) si $\alpha \neq 0$ ou $\alpha \neq 4$.

Cas où $\alpha = 0$:

Si $\alpha = 0$, la forme normale de Morse (l'**indice de Morse** en $(0,0,0)$ est 0) garantit l'existence d'un difféomorphisme local ϕ autour de 0 tel que :

$$f_0 \circ \phi = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ainsi, 0 est une point isolé de f_0^{-1}, donc S_0 est une sous-variété de dimension zéro.

Cas où $\alpha = 4$:

Indice de Morse au point critique $(2,2,2)$

Hessienne en $(2,2,2)$:

$$H_f(2,2,2) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Diagonalisation par congruence
Matrice initiale :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

1

Étape 1 : Annulation des éléments sous le pivot $a_{11} = 2$: - $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$, - $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$. Résultat :

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Étape 2 : Diagonalisation du bloc inférieur 2×2 : - $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$, $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$, - $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$. Résultat final :

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, l'**indice de Morse** en $(2,2,2)$ est 1, ce qui correspond à un **point selle**.

D'après la forme normale de Morse, il existe un difféomorphisme local au voisinage de $(2,2,2)$ tel que :

$$f_4 \circ \phi = x^2 + y^2 - z^2.$$

Dans ce cas, S_4 n'est pas une sous-variété.

Exercice 2

1. Montrer que f est bien définie

Soit $(x, y, z) \in S_1$. Par définition de S_1, on a : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Définissons l'application f par : $f(x, y, z) = (x, y, 5z)$. Alors, $f(x, y, z) = \left(x, y, 5\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

2

Posons $z' = 5\sqrt{x^2 + y^2}$. Alors, $f(x, y, z) = (x, y, z')$. Ainsi, $f(x, y, z) \in S_2$, ce qui correspond à la définition de l'ensemble $S_2 = \left\{(x, y, z') \in \mathbb{R}^3 \mid z' = 5\sqrt{x^2 + y^2}\right\}$. Donc, $f(x, y, z) \in S_2$, ce qui montre que f est bien définie de S_1 dans S_2.

2. Calcul le différentiel par les coordonnées locales

Paramétrisation locale des surfaces

Pour S_1, définissons une paramétrisation locale :

0,5

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to S_1, \quad \varphi(u, v) = \left(u, v, \sqrt{u^2 + v^2}\right).$$

Pour S_2, définissons :

0,5

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to S_2, \quad \psi(u, v) = \left(u, v, 5\sqrt{u^2 + v^2}\right).$$

Expression de f en coordonnées locales

L'application f est donnée par $f(x, y, z) = (x, y, 5z)$. Composons avec φ :

$$f \circ \varphi(u, v) = f\left(u, v, \sqrt{u^2 + v^2}\right) = \left(u, v, 5\sqrt{u^2 + v^2}\right).$$

Notons que :

$$\psi(u, v) = \left(u, v, 5\sqrt{u^2 + v^2}\right).$$

Ainsi, $f \circ \varphi(u, v) = \psi(u, v)$. La représentation en coordonnées est :

1

$$f^{\text{coord}}(u, v) = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi(u, v) = \psi^{-1} \circ \psi(u, v) = (u, v).$$

Donc, f^{coord} est l'application identité.

Calcul du Jacobien

La matrice jacobienne de $f^{\text{coord}}(u, v) = (u, v)$ est :

0,5

$$df^{\text{coord}}(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vecteurs tangents à partir de la carte

Les vecteurs de base du plan tangent à S_1 sont :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right).$$

Au point $p = (t, 0, t)$, $\varphi(u, v) = \left(u, v, \sqrt{u^2+v^2}\right)$.

Soit $(u, v) = (t, 0)$, avec $\sqrt{u^2+v^2} = t$, $(t > 0)$:

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{t}{t} = 1, \quad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{0}{t} = 0.$$

Donc :

0,5

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (1, 0, 1), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (0, 1, 0).$$

Si le vecteur $(-1, 1, 0)$ est tangent, alors il doit s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 0)$, c'est-à-dire :

$$\alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 0) = (-1, 1, 0).$$

On cherche à résoudre :

0,5

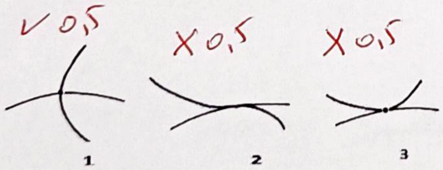
$$(\alpha, \beta, \alpha) = (-1, 1, 0).$$

Cela donne le système : $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\alpha = 1$. Ce système est incompatible (car α ne peut être à la fois -1 et 1). Donc, le vecteur $(-1, 1, 0)$ n'est pas tangent, et on ne peut pas calculer df_p en cette direction.

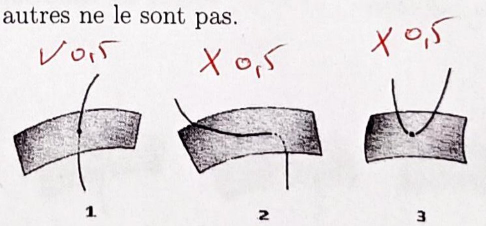
0,5

Exercice 3

Seules (a-1) et (b-1) sont transverses ; les autres ne le sont pas.



(a) Courbes dans $\mathbb{R}^2$.



(b) Courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^3$.