

Exercice 1. (6,5pts)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1], \\ 2-x & \text{si } x \in]1,2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Montrer que $f, f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

D'abord, on trouve

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]1,2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

0.5

On a

$$0 \leq \int_K f(x) dx \leq \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx \leq \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 dx + \int_1^2 (2-x) dx = \frac{3}{2},$$

et

$$0 \geq \int_K f'(x) dx \geq \int_{-a}^a f'(x) dx = \int_0^a f'(x) dx \geq \int_1^2 f'(x) dx = -\int_1^2 dx = -1$$

0.5

pour tout compact $K \subset [-a, a]$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi donc, $f, f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

0.5

(2) Calculer la distribution T_f sur $\mathbb{R}$. En déduire que : $(T_f)' = \delta_0 - \mathbf{1}_{]1,2]}$ au sens des distributions.

Comme $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, la distribution T_f est bien définie sur $\mathbb{R}$. On a

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx + \int_1^2 (2-x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

0.5

Ainsi donc,

$$\begin{aligned} \langle (T_f)', \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx \\ &= -\int_0^1 \varphi'(x) dx - \int_1^2 (2-x) \varphi'(x) dx \\ &= -\varphi(x)|_0^1 - (2-x) \varphi(x)|_1^2 - \int_1^2 \varphi(x) dx \\ &= \varphi(0) - \int_1^2 \varphi(x) dx = \langle \delta_0, \varphi \rangle - \langle \mathbf{1}_{]1,2]}, \varphi \rangle \\ &= \langle \delta_0 - \mathbf{1}_{]1,2]}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

0.5

0.5

0.5

0.5

i.e. $(T_f)' = \delta_0 - \mathbf{1}_{]1,2]}$ au sens des distributions.

0.5

(3) Déterminer $T_{f'}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Que remarque-t-on ?

Comme $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, la distribution $T_{f'}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. On a

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(x) \varphi(x) dx = -\int_1^2 \varphi(x) dx = -\langle \mathbf{1}_{]1,2]}, \varphi \rangle = \langle -\mathbf{1}_{]1,2]}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

1

i.e. $T_{f'} = -\mathbf{1}_{]1,2]}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

0.5

On remarque que

$$(T_f)' = T_{f'} + \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

0.5

ce qui pouvait être obtenu grâce au Théorème des sauts.

Exercice 2. (7,5pts)

Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in \left]0, \frac{1}{n}\right[\\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(1) Est-ce que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge ?

Soit $x \in \mathbb{R}$ et calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

Si $x \leq 0$, alors $f_n(x) = 0$. Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

0.25

Si $x > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x > \frac{1}{n_0}$. D'où, pour tout $n \geq n_0$, on a $f_n(x) = 0$. Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

0.5

Par conséquent, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $f \equiv 0$.

0.25

(2) Montrer que $\{T_{f_n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers δ_0 . En déduire que $\{T_{f_n^2}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

D'abord, on a

$$0 \leq \int_K f_n(x) dx \leq \int_{-a}^a f_n(x) dx \leq \int_0^{1/n} n dx = 1,$$

0.5

pour tout compact $K \subset [-a, a]$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi donc, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset L_{loc}^1(\mathbb{R})$.

Pour montrer que $\{T_{f_n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers δ_0 , il suffit d'établir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

0.5

On a

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

et donc,

$$\begin{aligned} |\langle T_{f_n}, \varphi \rangle - \langle \delta_0, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| = \left| \int_0^{1/n} n \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| \\ &= \left| \int_0^{1/n} n [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \leq n \int_0^{1/n} |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

0.5

Le théorème des accroissements finis assure qu'il existe $\xi \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que :

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x \varphi'(\xi).$$

0.25

0.5

Il s'ensuit

$$|\langle T_{f_n}, \varphi \rangle - \langle \delta_0, \varphi \rangle| \leq n \int_0^{1/n} x |\varphi'(\xi)| dx \leq nM \int_0^{1/n} x dx = \frac{M}{2} \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

où,

$$M = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi'(t)| = \|\varphi'\|_{\infty}.$$

0.5

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle T_{f_n}, \varphi \rangle - \langle \delta_0, \varphi \rangle| = 0,$$

0.25

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

i.e. $\{T_{f_n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers δ_0 .

Soit, maintenant, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(0) \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} \langle T_{f_n^2}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f_n^2(x) \varphi(x) dx = \int_0^{1/n} n^2 \varphi(x) dx \\ &= n \int_0^{1/n} n \varphi(x) dx = n \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi(x) dx = n \langle T_{f_n}, \varphi \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) \neq 0,$$

on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_{f_n^2}, \varphi \rangle = \pm \infty,$$

i.e. $\{T_{f_n^2}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(3) Montrer que la suite $\{T_{f_n^2} - n\delta_0\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en calculant sa limite.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\langle T_{f_n^2} - n\delta_0, \varphi \rangle = \langle T_{f_n^2}, \varphi \rangle - n \langle \delta_0, \varphi \rangle = n^2 \int_0^{1/n} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx.$$

Au voisinage de 0, le développement en série de Taylor donne

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2} \varphi''(\xi_x),$$

avec $\xi_x \in]0, x[$.

D'où,

$$\langle T_{f_n^2} - n\delta_0, \varphi \rangle = n^2 \int_0^{1/n} \left[x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2} \varphi''(\xi_x) \right] dx = \frac{1}{2} \varphi'(0) + \frac{n^2}{2} \int_0^{1/n} x^2 \varphi''(\xi_x) dx.$$

Mais,

$$\begin{aligned} \left| \frac{n^2}{2} \int_0^{1/n} x^2 \varphi''(\xi_x) dx \right| &\leq \frac{n^2}{2} \int_0^{1/n} x^2 |\varphi''(\xi_x)| dx \\ &\leq \frac{n^2}{2} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi''(t)| \int_0^{1/n} x^2 dx = \frac{1}{2n} \|\varphi''\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_{f_n^2} - n\delta_0, \varphi \rangle = \frac{1}{2} \varphi'(0) = \frac{1}{2} \langle \delta_0, \varphi' \rangle = -\frac{1}{2} \langle \delta_0', \varphi \rangle = \langle -\frac{1}{2} \delta_0', \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (T_{f_n^2} - n\delta_0) = -\frac{1}{2} \delta_0'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 3. (6pts)

(1) Soit E un e.v.t. Montrer que l'intersection de tous les voisinages de 0 est égale à $\overline{\{0\}}$ et représente un sous-espace vectoriel de E . En déduire que E est de Hausdorff si, et seulement si, $\{0\}$ est fermé.

Dénotons par $\mathcal{N}$ l'intersection de tous les voisinages de 0. Evidemment, on a $\overline{\{0\}} \subset \mathcal{N}$.

0.25

Inversement, soit $x \in \mathcal{N}$. Alors, tout voisinage de 0 contient x .

0.25

Ainsi donc, tout voisinage de x contient 0.

0.25

D'où, x adhère à $\{0\}$, i.e. $x \in \overline{\{0\}}$.

0.5

En résumé, on obtient $\mathcal{N} = \overline{\{0\}}$.

0.25

Comme $\{0\}$ est un sous-espace de E , son adhérence $\overline{\{0\}} = \mathcal{N}$ l'est aussi.

0.5

Dire que $\{0\}$ est fermé revient à dire que $\mathcal{N} = \{0\}$, ou qu'aucun élément $x \in E \setminus \{0\}$ ne peut appartenir à tous les voisinages de 0.

Par conséquent, $\{0\}$ est fermé si, et seulement si, E est de Hausdorff.

0.25

0.75

(2) Soient $U \subset \mathbb{R}^{n_1}, V \subset \mathbb{R}^{n_2}$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$) deux ouverts, et F une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U \times V$. Pour toute $\varphi \in L^1_{loc}(V)$, on pose :

$$\psi(x) = \int_V F(x, y) \varphi(y) dy \quad \forall x \in U.$$

Montrer que l'application $\mathcal{K} : \varphi \rightarrow \psi$ envoie continûment $L^1_{loc}(V)$ dans $\mathcal{E}(U)$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe $\int$, on a

0.5

$$(D^\alpha \psi)(x) = \int_V (D^\alpha_x F)(x, y) \varphi(y) dy \quad \forall x \in U, \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Ceci montre que $\psi \in \mathcal{E}(U)$. L'application $\mathcal{K} : \varphi \rightarrow \psi$ est bien définie de $L^1_{loc}(V)$ dans $\mathcal{E}(U)$.

0.5

Soit K un compact dans V . Si H est un compact dans U et $m \in \mathbb{N}$, alors on a

$$\begin{aligned} p_{H,m}(\mathcal{K}(\varphi)) &= \sup_{x \in H} \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} |(D^\alpha \mathcal{K}(\varphi))(x)| \\ &\leq \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} \int_K \sup_{x \in H} |(D^\alpha_x F)(x, y)| |\varphi(y)| dy \\ &\leq \left(\sup_{\substack{(x,y) \in H \times K \\ |\alpha| \leq m}} \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |(D^\alpha_x F)(x, y)| \right) \int_K |\varphi(y)| dy \\ &\leq \left(\sup_{\substack{(x,y) \in H \times K \\ |\alpha| \leq m}} \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |(D^\alpha_x F)(x, y)| \right) \|\varphi\|_{L^1(V)} \quad \forall \varphi \in L^1_{loc}(V). \end{aligned}$$

1.5

Cela montre que l'application $\mathcal{K}$ est continue de $L^1_{loc}(V)$ dans $\mathcal{E}(U)$.

0.5