Faculté des Sciences Exactes et SNV - Univ. OEB
Département des Mathématiques et Informatique
3ème année Maths Licence - S6 (2024-2025)

Examen Méthodes Numériques pour EDO et EDP

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Coefficients : 5. crédits : 6.

Le 11-05-2025 de 09h00 à 10h30

Exercice 1 *(07 pts, 30 mn) Soit* $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 1\}$, *on définit le problème de Laplace avec des conditions de Dirichlet non homogènes suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}y + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}y = 0, \ \ (x,t) \in \left]0,1\right[\times \left]0,1\right[, \\ y(x,0) = 2x, \ y(x,1) = 2x - 1, \ \forall x \in [0,1], \\ y(0,t) = -t, \ y(1,t) = 2 - t, \ \forall t \in [0,1], \end{cases} \tag{1}$$

où $y = y(x,t)$.

1. *Représenter graphiquement les conditions de Dirichlet de ce problème sur le bord du domaine* Ω. 0,25×4
2. *Déterminer* a *et* b *telle que* $y(x,t) = ax + bt$ *est une solution exacte du problème (1).* 1+1
3. *Fixons* $n = 3$ *et* $m = 1$, *pour* $x_i = i\Delta x$, $t_j = j\Delta t$ *où* $\Delta x = \frac{1}{n+1}$ *et* $\Delta t = \frac{1}{m+1}$. *Écrire le schéma de différences finies correspondant au problème (1), puis calculer la solution approchée et la comparer à la solution exacte.* 1+1,5+1,5

Exercice 2 *(07 pts, 30 mn) Considérons l'équation aux différences finies suivante :*

$$y_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\varepsilon\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) y_{i,j} + \left(\frac{\varepsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) y_{i+1,j} + \left(\frac{\varepsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) y_{i-1,j}, \tag{2}$$

sous la condition initiale et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} y_{i,0} &= y_0(x_i), \forall i = \overline{1,n}, \\ y_{0,j} &= y_{n+1,j} = 0, \forall j = \overline{1,m}, \end{aligned}$$

où y_0 *est une fonction donnée, et* $\Delta x, \Delta t$, *ainsi que* ε *sont des constantes strictement positives.*

1. Montrer que l'erreur de consistance du schéma est majorée par $C(\Delta t + (\Delta x)^2)$, où C est une constante dépendant de la solution exacte de l'équation différentielle partielle suivante :

1+1+1+0,5

$$\frac{\partial}{\partial t}y(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}y(x,t) - \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) = 0, x \in \left]0,1\right[, t \in \left]0,T\right[. \tag{3}$$

2. Sous quelle condition sur Δt et Δx peut-on garantir que : 1+1

$$\|y_j\|_\infty \leq \|y_0\|_\infty, \forall j = 1, \cdots m.$$

3. Énoncer un résultat de convergence pour le schéma (2). 1+0.5

Exercice 3 *(07 pts, 30 mn) On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} -y''(t) & = & \sin(t), \ \textit{pour } t \in \Omega =]0,1[, \\ y(0) & = & 0, \\ y(1) & = & 0. \end{cases} \tag{4}$$

1. Déterminer la solution exacte du problème (4). 1

2. On prend $h = \frac{1}{3}$ et $t_0 = 0$.

   On souhaite approximer la solution de (4) à l'aide de la méthode des éléments finis linéaires (P_1), en effectuant les calculs avec une précision de trois décimales.

   (a) Écrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire $A\widetilde{y} = b$, puis résoudre ce système pour déterminer $\widetilde{y}$. 1+1+1+1+1

   (b) Comparer la solution approchée obtenue à la solution exacte. 1

Bon succès !

Solution
Exercice 1

0,25 ×4

1. Traçons le domaine Ω :

1

.... (1 pt)

2. Déterminons a et b :
On sait que $y(x,t) = ax + bt$ est une solution exacte, alors

$$a = 2, \qquad 1$$
$$b = -1. \qquad 1$$

D'où la solution exacte du problème stationnaire (1) est $y(x,t) = 2x - t$.

.... (2 pts)

3. On fixe $n = 3$ et $m = 1$:
On a $\Delta x = \frac{1}{4}$ et $\Delta t = \frac{1}{2}$, le schéma de différences finies correspond à ce problème est donné par

$$\begin{cases} 4y_{i-1,j} - 10y_{i,j} + 4y_{i+1,j} + y_{i,j-1} + y_{i,j+1} = 0, 1 \leq i \leq 3; j = 1, \\ y_{i,0} = \frac{i}{2}, y_{i,2} = \frac{i}{2} - 1, 0 \leq i \leq 4, \\ y_{0,j} = -\frac{j}{2}, y_{4,j} = 2 - \frac{j}{2}, 0 \leq j \leq 2. \end{cases}$$

1

.... (1 pt)

On fixe $j = 1$ et on a pour $i = 1, 2, 3$:

0,5×3

$$(y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1})^t = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)^t.$$

1,5

.... (1.5 pts)

La comparaison entre les deux solutions : on a

$$y(x_i, t_j) = 2x_i - t_j = 2i\Delta x - j\Delta t = \frac{2i}{4} - \frac{j}{2} = \frac{1}{2}(i - j).$$

D'où

(x_i, y_1)	(x_1, y_1)	(x_2, y_1)	(x_3, y_1)
solution approchée	0	0.5	1
solution exacte	0	0.5	1

1,5

.... (1.5 pts)

0,5×3

Exercice 2

1. L'erreur de consistance : En utilisant le développement de Taylor, on obtient :

$$\mathcal{E}_{i,j} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) y(x_i, t_j) \quad \overset{0}{\nearrow}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) y_{ij} \; + \frac{\Delta t}{2} y_{tt}(x_i, \eta_m) + \frac{(\Delta x)^2}{6} y_x^{(3)}(\xi_i, t_n) + \frac{-\varepsilon(\Delta x)^2}{12} y_x^{(4)}(\xi_i, t_n)$$

Donc $|\mathcal{E}_{i,j}| \leq C(\Delta t + (\Delta x)^2)$,
où $C = \max\left(\frac{1}{2}\max_t |y_{tt}(x,t)|, \frac{1}{6}\max_x \left|y_x^{(3)}(x,t)\right| + \varepsilon\frac{1}{12}\max_x \left|y_x^{(4)}(x,t)\right|\right)$.
Alors, $\Longrightarrow \|\mathcal{E}\|_\infty \longrightarrow 0$ quand $(\Delta x, \Delta t) \longrightarrow (0,0)$ et le schéma est consistant d'ordre 2 pour l'espace et d'ordre 1 pour le temps.

.... (3.5 pts)

2. La condition CFL (Courant Freidrichs-Lax) : Toutes les coefficients soient positives, c'est-à-dire

$$1 \geq \frac{2\varepsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{ et } \frac{\varepsilon}{\Delta x} \geq \frac{1}{2}. \qquad (5)$$

ord ×2

Sous les conditions (5), on a :

$$\begin{aligned} y_{i,j+1} &\leq \left(1 - \frac{2\varepsilon\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)\max_i y_{i,j} + \left(\frac{\varepsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\max_i y_{i,j} + \left(\frac{\varepsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\max_i y_{i,j} \\ &\leq \max_i y_{i,j} \\ &\Longrightarrow \max_i y_{i,j+1} \leq \max_i y_{i,j} \Longrightarrow \max_i y_{i,j} \leq \max_i y_{i,0} \text{ (par réccurence).} \end{aligned}$$

Alors, on a : $\max_i |y_{i,j}| \leq \max_i |y_{i,0}| \Longrightarrow \|y_j\|_\infty \leq \|y_0\|_\infty, \forall j = 1, \cdots m$.

.... (2 pts)

3. La convergence. On a : $e_{i,j} = y(x_i, t_j) - y_{i,j}$. Donc

$$e_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\varepsilon\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)e_{i,j} + \left(\frac{\varepsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)e_{i+1,j} + \left(\frac{\varepsilon\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)e_{i-1,j} + \Delta t\mathcal{E}_{i,j}$$

Donc

$$\begin{aligned} |e_{i,j+1}| &\leq \max|e_{i,j}| + \Delta t C(\Delta t + (\Delta x)^2) \text{ (par stabilité “condition (5)” et consistance)} \\ &\Longrightarrow |e_{i,j}| \leq \max|e_{i,0}| + m\Delta t C(\Delta t + (\Delta x)^2) \\ &\Longrightarrow \|e_j\|_\infty \leq \|e_0\|_\infty + CT(\Delta t + (\Delta x)^2), \text{ où } m\Delta t = T. \end{aligned}$$

Comme $\|e_0\|_\infty = 0$, alors, $\|e_j\|_\infty \leq CT(\Delta t + (\Delta x)^2) \Longrightarrow \|e_j\|_\infty \longrightarrow 0$ quand $(\Delta x, \Delta t) \longrightarrow (0,0)$.

Consistance + Stabilité ≡ Convergence.

.... (1.5 pts)

Exercice 3

1. La solution exacte du problème est

$$y(t) = \sin(t) - t\sin(1).$$

....(1 pt)

2. a. Eléments finis linéaires : 0.5 x 2

FV : $\int_0^1 y'(t)v'(t)dt = \int_0^1 \sin(t)\,v(t)\,dt$, où v est une fonction de test

....(1 pt)

FVA : $\int_0^1 y_h'(t)v_h'(t)dt = \int_0^1 \sin(t)\,v_h(t)\,dt$, où $v_h \in vect\{\phi_1, \phi_2\}$.

....(1 pt)

0.5 x 2

$(FVA) \iff A\tilde{y} = b$ où

0.25x4

$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ = matrice de rigidité.

....(1 pt)

0.5x2

$b = \begin{pmatrix} 0.108 \\ 0.204 \end{pmatrix}.$

....(1 pt)

0.5x2

$A\tilde{y} = b \iff \tilde{y} = A^{-1} \times b = \begin{pmatrix} 4.667 \\ 5.733 \end{pmatrix}.$

....(1 pt)

b. Comparaison :

0.5x2

$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.667 \\ 5.733 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} y\left(\frac{1}{3}\right) \\ y\left(\frac{2}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.670 \\ 5.739 \end{pmatrix}.$

....(1 pt)