Universitaire Larbi Ben M'hidi O.E.B — 15 Mai 2025
Département de MI — Durée : 09h-10.30

Examen Final : - Statistique inférentielle- Master 1

Exercice 01 : Soit X une variable aléatoire avec une distribution de probabilité de densité

$$f(x;\theta,a)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{1}{\theta}-1}}{\theta a^{\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x\in[0,a]\\ 0 & \text{si non.}\end{cases}$$

où $a,\theta>0$.

(1) Donner la structure statistique pour un $n-$ échantillon.
(2) Calculer la fonction de vraisemblance.
(3) En utilisant le critère de factorisation, démontrer que
  (a) La statistique $\prod_{i=1}^{n} x_i$ est une statistique exhaustive pour θ.
  (b) La statistique $\mathbf{1}_{\max(x_i)\leq a}$ est une statistique exhaustive pour a.
(4) Donnée une statistique exhaustive pour (θ,a).
(5) Supposons que a est connu.
  – Montrer que le modèle appartient à la famille exponentielle, déduire une autre statistique exhaustive pour θ.

Exercice 02 : La durée de vie en heures d'un composante électronique est une variable aléatoire X de densité

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta^2 x e^{-\theta x} & \text{si } x\geq 0;\\ 0 & \text{si non.}\end{cases}$$

où $\theta>0$.

(1) Montré que $E(X)=\dfrac{2}{\theta}$.
(2) Montré que le modèle considéré appartient à la famille exponentielle.
(3) Vérifier que le modèle est régulier.
(4) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(X_1,X_2,...,X_n)$ un $n-$échantillon de X.
  (a) Calculer la fonction de vraisemblance.
  (b) Calculer le score et l'information de Fisher.
  (c) Calculer l'information de Kullback.

Exercice 03 : Soit X une variable aléatoire avec une distribution de probabilité de densité

$$f(x;a)=\frac{e^{-\frac{\sqrt{x}}{a}}}{2a\sqrt{x}}\,1(x)_{]0,+\infty[}\quad;$$

où $a>0$.

(1) Montré que $E(X)=2a^2$, et $E\left(\sqrt{X}\right)=a$.
(2) Calculer l'estimateur $\widehat{a}$ de a par la méthode de maximum de vraisemblance.
(3) Calculer le biais de a.
(4) $\widehat{a}$ est-il biaisé ?
(5) $\widehat{a}$ est-il convergent ?

Correction de l'examen

Exercice 01:

1) $\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \{f(x;\theta,a), \theta, a \in \mathbb{R}^{+2}\}\right)^n$. 0.5

2) $L(\theta,a;x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{1/\theta-1}}{\theta a^{1/\theta}} \mathbb{1}_{[0,a]}(x_i)$

pour $(x_1,\dots,x_n)$ une observation de n-echantillon $(X_1,\dots,X_n)$ des v.a iid.

$$= \left(\frac{1}{\theta a^{1/\theta}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/\theta-1} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{0\leq x_i\leq a}(x_i)$$ 01

$$= \frac{1}{\theta^n a^{n/\theta}} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/\theta-1} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{0\leq x_i\leq a}(x_i)$$

$$= \frac{1}{\theta^n a^{n/\theta}} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/\theta-1} \mathbb{1}_{M(x_i)\leq a} \mathbb{1}_{\min x_i \geq 0}.$$

3) a) $L(\theta;x) = \theta^{-n} a^{-n/\theta} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/\theta-1} \mathbb{1}_{Max(x_i)\leq a} \mathbb{1}_{\min x_i \geq 0}$

$$= g(t(x);\theta)\, h(x;a) \quad \text{où } t(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

telles que $g(t(x);\theta) = \theta^{-n} a^{-n/\theta} t(x)^{1/\theta-1}$.

$h(x;a) = \mathbb{1}_{Max(x_i)\leq a} \mathbb{1}_{\min(x_i)\geq 0}$. 01

$L(\theta, a; x) = g(t(x); a)\ h(x; \theta)$ $\quad t(x) = 1_{\max(x_i) \leq a}$

$$g(t(x); a) = a^{-n/\theta}\ 1_{\max(x_i) \leq a}$$

$$h(x; \theta) = \theta^{-n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{a/\theta - 1} 1_{\min(x_i) \geq 0}.$$

01

(c) $L(\theta, a; x) = g(t(x), \theta, a)\ h(x)$ ou

$\cancel{t(x) =} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i, 1_{\max x_i \leq a}\right)$, $\quad h(x) = 1_{\min(x_i) \geq 0}$

0.5

EXO 2 Remarquons que $X \sim \gamma(2, \theta)$

1/ $f(x) = \theta^2 x e^{-\theta x} 1_{[0,+\infty[}(x) = e^{a(x)\alpha(\theta) + \beta(\theta) + B(x)}$

telles que $a(x) = -x$, $\alpha(\theta) = \theta$, $\beta(\theta) = \ln \theta^2$

$B(x) = \ln\left[x \, 1_{[0,+\infty[}(x)\right]$. 01

2/ le modèle est régulier car : $d = 1$

$\Theta = \mathbb{R}^+_* =]0, +\infty[$ est un ouvert

Le support est $]0, +\infty[$ $(f(x) = 0$ pour $x = 0)$ 01

ne dépend pas de θ

$f(x;\theta) \in C^\infty(\theta)$. et $\frac{\partial}{\partial\theta} f$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$ est intégrable

2/ Comme le modèle est régulier

$$I_n(\theta) = -E\left(\frac{d^2}{d\theta^2} \log \mathcal{L}(\theta; x)\right)$$ 01

$$\mathcal{L}(\theta; x) = \theta^{2n} \prod_{i=1}^n x_i \, e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n 1_{[0,+\infty[}(x_i)$$

$$= \theta^{2n} \prod_{i=1}^n x_i \, e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} \, 1_{[0,+\infty[^n}(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\ell(\theta; x) = \log \mathcal{L}(\theta; x) = 2n \log \theta + \sum_{i=1}^n \log x_i - \theta \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{d}{d\theta} \ell(\theta; x) = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \ell(\theta; x) = \frac{-2n}{\theta^2}$$

$$I_n(\theta) = -E\left(\frac{d^2}{d^2\theta} \ell(\theta; x)\right) = -E\left(\frac{-2n}{\theta^2}\right) = \frac{2n}{\theta^2}$$ 01

3/ On a

$$l(\theta;x) = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{d}{d\theta} l(\theta;x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2n}{\theta} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{2}{\bar{X}}$$ 01

$$\frac{d^2 l(\theta;x)}{d\theta^2} = -\frac{2n}{\theta} < 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2}{\bar{X}}$$ est l'E.M.V.

Exo 3 : soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de X i.i.d.

1/ $$L(\theta;x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \frac{(2\theta)^{-n}}{\prod_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}$$

$$l(\theta;x) = -n\log(2\theta) - \log \prod_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$$ 01

$$= -n\log 2 - n\log\theta - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\log x_i - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$$

$$\frac{\partial l(\theta;x)}{\partial\theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$$

$$\frac{\partial l}{\partial\theta}(\theta;x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} = \frac{n}{\theta} \Leftrightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}$$ 01

2) $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$ est un estimateur sans biais pour θ car

Comme X_i sont iid
$E(X_i) = E(X)\ \forall i = \overline{1,n}$
$E(\sqrt{X_i}) = E(\sqrt{X})\ \forall i = \overline{1,n}$

$$E(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\sqrt{X_i})$$

$$= \frac{n\,E(\sqrt{X})}{n} = E(\sqrt{X})$$

$$E(\sqrt{X}) = \int_0^{+\infty} \sqrt{x}\, f_X(x)\,dx = \frac{1}{2\theta}\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\,\frac{e^{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

01

$$= \frac{1}{2\theta}\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\,\frac{e^{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$v' = \frac{e^{-\sqrt{x}/\theta}}{\sqrt{x}} \Rightarrow v = -2\theta\, e^{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}}$$

$$= \left[u(x)\,v(x)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(x)\,v(x)\,dx$$

$$= \left[-2\theta\sqrt{x}\, e^{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2\theta\,\frac{e^{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= 0 + \theta\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\theta^2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\theta\sqrt{x}}\,dx = 2\theta^2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= 2\theta^2$$

$$E(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\theta}\,2\theta^2 = \theta = g(\theta) = Id_{\mathbb{R}} = \theta$$

01

$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\sqrt{x_i})$ est un estimateur sans biais pour θ

3) Démontrons que $\hat{\theta}$ est un estimateur convergent

$$V(\hat{\theta}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(\sqrt{x_i})$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(\sqrt{x}) = \frac{1}{n}V(\sqrt{x})$$

$$V(\sqrt{x}) = E(x) - E^2(\sqrt{x}) \, .$$

$$E(x) = \int_0^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{2\theta}\int_0^{+\infty} \sqrt{x}^2 \frac{e^{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}}}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{par parties}$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v'(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}/\theta}}{2\sqrt{x}} \Rightarrow v(x) = -e^{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}}$$

$$E(x) = -x e^{-\sqrt{x}/\theta}\Big|_0^{+\infty} + \int e^{-\sqrt{x}/\theta}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}/\theta}\,dx$$

On sait que

$$E(\sqrt{x}) = \int_0^{+\infty} \sqrt{x}\,\frac{e^{-\sqrt{x}/\theta}}{2\theta\sqrt{x}} = \frac{1}{2\theta}\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}/\theta}\,dx = \theta \quad (\text{question } 2)$$

$$\Rightarrow E(x) = 2\theta \cdot \frac{1}{2\theta}\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}/\theta}\,dx = 2\theta^2$$

$$V(\sqrt{x}) = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}V(\sqrt{x}) = \frac{\theta^2}{n} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} \text{ est un estimateur convergent}$$

01

$$\frac{L(\vartheta_0)}{L(\vartheta_1)} = \frac{\vartheta_0^{2n} \prod x_i \, e^{-\vartheta_0 \sum x_i} \, 1_{\min x_i \geq 0}}{\vartheta_1^{2n} \prod x_i \, e^{-\vartheta_1 \sum x_i} \, 1_{\min x_i \geq 0}}$$

$$= \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)^{2n} e^{(\vartheta_1 - \vartheta_0) \sum x_i}$$

$$\log\left[\frac{L(\vartheta_0)}{L(\vartheta_1)}\right] = 2n \log\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right) + (\vartheta_1 - \vartheta_0) \sum x_i$$ 01

$$E\left\{\log\left[\frac{L(\vartheta_0)}{L(\vartheta_1)}\right]\right\} = 2n \log\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right) + (\vartheta_1 - \vartheta_0) \sum_{i=1}^{n} E(X_i) .$$

$$= 2n \log\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right) + (\vartheta_1 - \vartheta_0) \left(\frac{2n}{\vartheta_0}\right) .$$