Contrôle QCM d'Analyse Numérique [redacted] - CORRECTION SEULEMENT

Instructions : Voici la bonne réponse pour chaque question.

I. Méthodes Directes

1. **B) Un élément diagonal devient nul à une étape de l'élimination.**
2. **B) Éviter la division par des nombres de très petite magnitude, réduisant ainsi la propagation des erreurs d'arrondi.**
3. **B) Ont des ordres de grandeur très différents d'une ligne à l'autre.**
4. **C) Symétrique définie positive.**
5. **B) $PA = LU$, où P est une matrice de permutation.**
6. **C) Plus coûteuse en termes de nombre d'opérations pour résoudre un seul système.**

II. Méthodes Itératives

7. **C) Le rayon spectral de la matrice d'itération est strictement inférieur à 1.**
8. **B) Utilise les composantes du vecteur solution les plus récemment calculées au cours de la même itération.**
9. **C) $(0, 2)$**
10. **C) Les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent toutes les deux.**
11. **B) $\|r^{(k)}\|$ est inférieur à une tolérance donnée ϵ.**

III. Résolution Numérique des EDO d'Ordre Un

12. **B) $O(h^2)$**
13. **C) Elle possède de meilleures propriétés de stabilité pour ces problèmes (par exemple, A-stabilité).**
14. **C) La partie homogène de l'équation a des composantes qui décroissent très rapidement, tandis que la solution particulière varie lentement.**
15. **B) 2**
16. **D) 4 fois.**
17. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) est populaire car :
    - **B) Elle offre un bon compromis entre précision (ordre 4) et coût de calcul (4 évaluations de f par pas).**
18. La méthode d'Euler explicite est :
    - **B) Une méthode de prévision**
19. La méthode d'itération de Jacobi est :
    - **B) Une méthode itérative**
20. La méthode de Gauss-Seidel améliore la méthode de Jacobi en :
    - **A) Utilisant des valeurs précédentes**

Université Larbi Ben M'Hidi - Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et la Vie
Département mathématique et informatique

Contrôle d'Analyse Numérique II

Durée : 1h

Une seule réponse correcte par question.

Toute réponse incorrecte entraîne une pénalité de -1 point. Pas de réponse = 0 point.

1. Considérez un système linéaire $Ax = b$ où A est une matrice $n \times n$. L'élimination de Gauss sans pivotement échoue si :

A) La matrice A est singulière.
B) Un élément diagonal devient nul à une étape de l'élimination.
C) La matrice A n'est pas symétrique.
D) Le vecteur b est le vecteur nul.

---

2. Le pivotement partiel dans l'élimination de Gauss est crucial pour la stabilité numérique car il permet de :

A) Minimiser le nombre d'opérations flottantes.
B) Éviter la division par des nombres de très petite magnitude, réduisant ainsi la propagation des erreurs d'arrondi.
C) Garantir que la matrice finale est diagonale.
D) Accélérer le processus de convergence vers la solution.

---

3. Le pivotement partiel avec mise à l'échelle des lignes est particulièrement utile lorsque les éléments de la matrice A :

A) Sont tous égaux.
B) Ont des ordres de grandeur très différents d'une ligne à l'autre.
C) Forment une matrice triangulaire.
D) Sont tous nuls.

---

4. La méthode de Cholesky pour la décomposition $A = LL^T$ est numériquement stable par nature (sans nécessiter de pivotement) si la matrice A est :

A) À diagonale strictement dominante.
B) Orthogonale.
C) Symétrique définie positive.
D) Triangulaire supérieure.

---

5. La décomposition LU d'une matrice A non singulière, obtenue par élimination de Gauss avec pivotement partiel, s'écrit généralement sous la forme :

A) $A = LU$
B) $PA = LU$, où P est une matrice de permutation.

C) $A = LDU$, où D est diagonale.

D) $A = QR$, où Q est orthogonale et R est triangulaire supérieure.

---

6. La méthode de Gauss-Jordan, comparée à l'élimination de Gauss suivie d'une remontée, est généralement :

A) Numériquement plus stable.

B) Plus rapide en termes de nombre d'opérations pour résoudre un seul système.

C) Plus coûteuse en termes de nombre d'opérations pour résoudre un seul système.

D) Applicable uniquement aux matrices symétriques.

---

7. Pour un système linéaire $Ax = b$, la méthode de Jacobi et la méthode de Gauss-Seidel convergent si :

A) La matrice A est inversible.

B) La matrice A est symétrique.

C) Le rayon spectral de la matrice d'itération est strictement inférieur à 1.

D) La matrice A est triangulaire.

---

8. La principale amélioration de la méthode de Gauss-Seidel par rapport à la mAéthode de Jacobi réside dans le fait que Gauss-Seidel :

A) Utilise un paramètre de relaxation optimal.

B) Utilise les composantes du vecteur solution les plus récemment calculées au cours de la même itération.

C) Nécessite moins de mémoire de stockage.

D) Converge toujours en un nombre fini d'itérations.

---

9. Pour la méthode de Sur-relaxation Successive (SOR), si la matrice A est symétrique définie positive, la méthode converge si le paramètre de relaxation ω appartient à l'intervalle :

A) $(0, 1)$

B) $[1, 2)$

C) $(0, 2)$

D) $(1, \infty)$

---

10. Si une matrice A est à diagonale strictement dominante, alors :

A) La méthode de Jacobi converge, mais pas nécessairement celle de Gauss-Seidel.

B) La méthode de Gauss-Seidel converge, mais pas nécessairement celle de Jacobi.

C) Les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent toutes les deux.

D) Aucune des méthodes itératives ne converge.

---

11. Un critère d'arrêt courant pour une méthode itérative $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$ est basé sur la norme du résidu $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$. On arrête l'itération lorsque :

A) $\|r^{(k)}\|$ est exactement nul.

B) $\|r^{(k)}\|$ est inférieur à une tolérance donnée ε
C) $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ est exactement nul.
D) Le nombre d'itérations k atteint une valeur prédéfinie (sans autre condition).

---

12. L'erreur de troncature locale de la méthode d'Euler explicite pour résoudre $y' = f(t, y)$ est d'ordre :
A) $O(h)$
B) $O(h^2)$
C) $O(h^3)$
D) $O(h^4)$

---

13. La méthode d'Euler implicite est souvent préférée à la méthode d'Euler explicite pour les problèmes raides ("stiff") car :
A) Elle est plus simple à implémenter.
B) Elle a un ordre de précision global plus élevé.
C) Elle possède de meilleures propriétés de stabilité pour ces problèmes (par exemple, A-stabilité).
D) Elle nécessite moins d'évaluations de la fonction f.

---

14. Un problème de Cauchy $y' = f(t, y)$ est dit "raide" (stiff) si :
A) La solution exacte $y(t)$ varie très rapidement.
B) La fonction $f(t, y)$ est non linéaire.
C) La partie homogène de l'équation a des composantes qui décroissent très rapidement, tandis que la solution particulière varie lentement.

D) La condition initiale y_0 est très grande.
15. La méthode de Heun (ou Euler modifiée) est un exemple de méthode de Runge-Kutta d'ordre :
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

---

16. La méthode de Runge-Kutta classique d'ordre 4 (RK4) nécessite, par pas de temps h, l'évaluation de la fonction $f(t, y)$:
A) 1 fois.
B) 2 fois.
C) 3 fois.
D) 4 fois.

---

17. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) est populaire car :
A) Elle est la seule méthode stable pour toutes les EDO.
B) Elle offre un bon compromis entre précision (ordre 4) et coût de calcul (4 évaluations de f par pas).

C) Elle ne nécessite pas de connaître la valeur initiale y(t0).
D) Elle est une méthode implicite simple.

---

18. La méthode d'Euler explicite est:
A) Stable pour tous les pas de temps
B) Une méthode de prévision
C) Toujours précise
D) Une méthode de correction

---

19. La méthode d'itération de Jacobi est :
A) Une méthode directe
B) Une méthode itérative
C) Une méthode de décomposition
D) Une méthode d'intégration

---

20. La méthode de Gauss-Seidel améliore la méthode de Jacobi en :
A) Utilisant des valeurs précédentes
B) Évitant les itérations
C) Réduisant le nombre d'équations
D) Augmentant le nombre d'inconnues

Prof. Abdelfatah Bouziani