

Université Larbi Ben M'hidi- Oum El Boughi
Faculté des SE et des SNV

Département de MI
Module ITOL

L3 Math
Mai 2025

Contrôle S 6 (1h et 30m)

Exercice 1 (6pts) Soit $E_i : i = \overline{1,3}$ des espaces de Banach, et $T : E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$ une application bilinéaire.

1. Montrer que T est continue si et seulement si (ssi) il existe une constante $C > 0 : \|T(x, y)\| \leq C\|x\|\|y\| \forall (x, y) \in E_1 \times E_2$.

2. On suppose que T est séparément continue, i.e : $\forall x \in E_1$, l'application $T_x : y \in E_2 \mapsto T_x(y) = T(x, y)$ est continue, et $\forall y \in E_2$, l'application $T_y : x \in E_1 \mapsto T_y(x) = T(x, y)$ est continue.

(a)-Montrer que T est continue en utilisant le Th de Banach Steinhaus.

(b)-Montrer que la famille d'applications linéaires continues $(\psi(T_x))_{\psi, x}$ pour $\psi \in E_3^* : \|\psi\| \leq 1, x \in E_1 : \|x\| \leq 1$ est uniformément bornées. En déduire que T est continue (utiliser un corollaire de Th de Hahn-Banach).

Exercice 2 (4pts) Soient E, F deux espaces de Hilbert, $T \in L(E, F)$ et T^* l'adjoint de T . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(1). T est unitaire.

(2). T est une isométrie et il existe $c > 0 : \|x\|_F \leq c\|T^*x\|_E, \forall x \in F$.

(3). T est surjective et isométrique.

Exercice 3 (5pts) Soient $p, q \in]1, \infty[: \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, x \in \ell^p$, et soit $T_x : (\ell^q, \|\cdot\|_q) \rightarrow \mathbb{K} : y \mapsto T_x(y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$.

1. Montrer que T_x est une forme linéaire sur $\ell^q : \|T_x\| = \|x\|_{\ell^p}$.

2. On considère $T : (\ell^p, \|\cdot\|_p) \rightarrow ((\ell^q)^*, \|\cdot\|) : x \mapsto T_x$. Montrer que T est un isomorphisme isométrique.

3. Soient $C_i \subset \ell^q, i = \overline{1,2}$ deux ouverts convexes disjoints. Montrer qu'il existe $x^0 \in \ell^p, \alpha \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^0 y_i < \alpha < \sum_{i=1}^{\infty} x_i^0 z_i \forall (y, z) \in C_1 \times C_2$.

Exercice 4 (5pts) Soit E un espace de Hilbert de dimension infinie, et $(T_n) \subset \mathcal{K}(E)$ convergeant vers $T \in \mathcal{K}(E)$ dans $L(E)$ et $(\sigma_n, \lambda_n) \in \sigma(T_n) \times \rho(T_n)$. Montrer que

1. l'application $\lambda \in \rho(T) \mapsto R(\lambda, T)$ (résolvante) $\in L(E)$.

2. toute valeur d'adhérence de (σ_n) appartient au spectre de T .

3. pour tout compact $K \subset \rho(T)$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}^* : K \subset \rho(T_n), \forall n \geq n_0$, si $\lambda_n \rightarrow \lambda$ alors $\lambda \in \rho(T)$ et que $R(\lambda_n, T_n)$ converge vers $R(\lambda, T)$ dans $L(E)$.

2025

- Ex 2.6

4

11/11/04

4218. *Y. Y.*

100-025

100/21

11/17/11

1

 $x = x_0$

Al. Sav.

9.50

Don't

.....

Handwritten signature: *[Illegible]*

76

