Université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques et Informatique

Master 1 : Mathématiques Appliquées **Année université 2024-2025**

Examen Finale : Équations aux dérivées Partielles

Exercice 01.

On considère le problème initial et aux limite suivante :

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x, y \in (0,1), \\ u(0, y) = u(1, y) = 0, & y \in (0,1), \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0,1), \\ u(x, 1) = x, & x \in (0,1), \end{cases}$$

où u est une fonction inconnue réelle de deux variables x et y.

- En appliquant la méthode de séparation des variables résoudre le problème (P) .

Exercice 02.

On considère le problème de Cauchy suivante :

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} u_{tt} - 2u_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty, \end{cases}$$

où u est une fonction inconnue réelle de deux variables x et t.

1. Donner la solution du problème de Cauchy (P).
2. En pose

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty \leq x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq +\infty \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty \leq x \leq 1 \\ \sqrt{2}\, x, & 1 < x \leq +\infty \end{cases}$$

Calculer $u\left(\sqrt{2}, 1\right)$, $\lim_{t \to \infty} u(x, t)$.

Exercice 03

On considère le problème initial et aux limite suivante :

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} u_t - u_{xx} = \mathrm{k}u & 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u(\ell, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 < x < \ell, \end{cases}$$

où u est une fonction inconnue réelle de deux variables (x, t) et $\mathrm{k} \geq 0$ est une constante.

On définit l'énergie associée au problème (P) par :

$$E(t) \coloneqq \frac{1}{2} \int_0^\ell u^2(t) dx.$$

1. Démontrer que :

$$E(t) \leq \frac{1}{2} \int_0^\ell \varphi^2(x) dx + \mathrm{k} \int_0^t \int_0^\ell u^2(s) dx\, ds, \quad \forall t > 0.$$

2. En utilisant la question 1, démontrer que le problème (P) admet une solution unique pour $\mathrm{k} = 0$.