Université Larbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi

Licence 2 - Mathématiques Année universitaire 2024/2025

Examen d'Analyse 4 - Version B 15 mai 2025

Durée : 01H30mn

Documents non autorisés - Téléphones portables éteints

Exercice 1 (6 points) *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.*
3. *Montrer que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Quel est le plus grand ouvert sur lequel f est de classe C^1 ?*
4. *La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?*
5. *Déterminer l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point $(\frac{1}{\pi}, 1, f(\frac{1}{\pi}, 1))$.*

Exercice 2 (3 points) *Soit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par*

$$F(x,y) = f\Big(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\Big)$$

où :

$$f(u,v,w) = e^{uv}\sin(w), \qquad u(x,y) = x^2 + y^2, \qquad v(x,y) = x - y, \qquad w(x,y) = xy.$$

1. *Déterminez $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ en utilisant la règle de la chaîne.*
2. *En déduire le vecteur gradient de F en $(0,1)$.*

Exercice 3 (4 points) *Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :*

$$f(x,y) = (e^x + y, x + y^3).$$

1. *Montrer qu'il existe un ouvert U contenant le point $(0,0)$ tel que la restriction $f|_U$ soit un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$.*

2. *Notons* $(f|_U)^{-1} = g = (g_1, g_2)$. *Déterminez la matrice jacobienne* $\mathbf{J}(g)_{(1,0)}$ *de* g *au point* $(1,0)$.

3. *En déduire* $\frac{\partial g_1}{\partial u}(1,0)$ *et* $\frac{\partial g_2}{\partial v}(1,0)$.

Exercice 4 (4 points)

1. *Vérifier que l'équation*

$$x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x = 0$$

définit implicitement y *comme une fonction* $y = \varphi(x)$ *au voisinage du point* $(0,0)$.

2. *Calculer les dérivées première et seconde de* φ *au point* 0.

3. *Montrer que* φ *dmet un développement limité de tout ordre en* 0 *et donner celui d'ordre* 2.

Exercice 5 (3,5 points) *Soit* D *le domaine plan défini par*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \ y \geq 0\right\},$$

et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$f(x,y) = xy \ln(x^2 + y^2).$$

a) *Dessiner le domaine* D.

b) *En utilisant un changement de variables approprié, calculer l'intégrale double* $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Corrigé de l'examen d'Analyse 4 - Version B

Solution 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

0,5

1. *Continuité.* La fonction f est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ en tant que produit de la fonction polynômiale $(x,y) \mapsto x^2y^2$ par la fonction $(x,y) \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ composée de la fonction rationnelle $(x,y) \mapsto \frac{1}{x}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ avec la fonction sinus laquelle est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour étudier la continuité au point $(0,b)$, avec $b \in \mathbb{R}$ arbitraire, on écrit pour $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$|f(x,y)| = x^2y^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^2y^2 \qquad (\text{car } |\sin w| \leq 1).$$

0,5

Comme,

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} x^2y^2 = 0.b = 0,$$

il vient,

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = 0 = f(0,b),$$

ce qui exprime la continuité de f en $(0,b)$.

Conclusion. f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. *Calcul des dérivées partielles de f :* Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, les fonctions partielles $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ sont des fonctions dérivables des variables x et y respectivement. Donc la fonction f admet des dérivées partielles par rapport aux deux variables en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, et on a

0,5

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - y^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Soit $b \in \mathbb{R}$ arbitraire. Pour tout $t \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{f((0,b)+(t,0)) - f(0,b)}{t} &= \frac{f(t,b) - f(0,b)}{t} = \frac{t^2b^2\sin\left(\frac{1}{t}\right) - 0}{t} = tb^2\sin\left(\frac{1}{t}\right), \\ \frac{f((0,b)+(0,t)) - f(0,b)}{t} &= \frac{f(0,b+t) - f(0,b)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0, \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to0} \frac{f(t,b) - f(0,b)}{t} &= \lim_{t\to0} tb^2\sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \qquad \left(\text{car } \sin\left(\frac{1}{t}\right) \text{ borné}\right), \\ \lim_{t\to0} \frac{f(0,b+t) - f(0,b)}{t} &= 0, \end{aligned}$$

donc f possède au point $(0,b)$ des dérivées partielles par rapport aux deux variables, et l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,b) = 0.$$

0,75

Conclusion :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2xy^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - y^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2x^2 y \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. La fonction f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ en tant que produit de la fonction polynômiale $(x,y) \mapsto x^2y^2$ par la fonction $(x,y) \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ composée d'une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ avec la fonction sinus laquelle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

0,5

Etudions maintenant la continuité des dérivées partielles sur l'ensemble $\{0\} \times \mathbb{R}$. Pour $b \in \mathbb{R}$ arbitraire, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} 2xy^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \qquad \left(\text{car } \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ est borné}\right)$$

0,75

mais

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} y^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{n'existe pas si } b \neq 0$$

car $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'admet pas de limite en $(0,b)$ si $b \neq 0$ et, par conséquent, n'est pas continue en $(0,b)$ pour tout $b \neq 0$. Ceci montre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$, et par suite f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

0,5

Si $b = 0$, $\lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ce qui montre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, mais le plus grand ouvert sur lequel f est de classe C^1 est seulement $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et non pas $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}) \cup \{(0,0)\}$ car ce dernier n'est pas ouvert.

0,25

4. Différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$. On a déjà vérifié que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, alors elle est différentiable sur cet ouvert.

Reste à étudier sa différentiabilité en tout point de $\{0\} \times \mathbb{R}$.

Soit $b \in \mathbb{R}$ arbitraire. Etudions la limite, quand $(x,y) \to (0,0)$, du quotient

$$\varepsilon(x,y) = \frac{f((0,b)+(x,y)) - f(0,b) - \left(x\frac{\partial f}{\partial x}(0,b) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,b)\right)}{\|(x,y)\|_1}.$$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

1

$$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,b+y) - 0 - (x.0+y.0)}{\|(x,y)\|_1} = \frac{f(x,b+y)}{\|(x,y)\|_1} = \begin{cases} \frac{x^2(b+y)^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{|x|+|y|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Si $x = 0$, $\varepsilon(x,y) = 0$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$, et si $x \neq 0$, on a

$$|\varepsilon(x,y)| \leq \frac{x^2(b+y)^2}{|x|+|y|} \leq \frac{x^2(b+y)^2}{|x|} \leq |x|\,(b+y)^2.$$

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x|\,(b+y)^2 = 0$, on déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$.

Par conséquent, la fonction f est différentiable en tout point $(0,b)$ de $\{0\} \times \mathbb{R}$, et par suite, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

5. Comme f est différentiable au point $(\frac{1}{\pi}, 1)$, alors la surface d'équation $z = f(x,y)$ (i.e. le graphe de f) admet un plan tangent au point $(\frac{1}{\pi}, 1, f(\frac{1}{\pi}, 1))$ et ce plan a pour équation

0,5

$$z - f\left(\frac{1}{\pi}, 1\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\pi}, 1\right)\left(x - \frac{1}{\pi}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{\pi}, 1\right)(y-1).$$

Or,

0,25

$$f\left(\frac{1}{\pi}, 1\right) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\pi}, 1\right) = \frac{2}{\pi}\sin(\pi) - \cos(\pi) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{\pi}, 1\right) = \frac{2}{\pi^2}\sin(\pi) = 0,$$

d'où, l'équation désirée :

$$z = x - \frac{1}{\pi}.$$

Solution 2 Soit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $F(x,y) = f\left(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\right)$ où :

$$f(u,v,w) = e^{uv}\sin(w), \qquad u(x,y) = x^2+y^2, \qquad v(x,y) = x-y, \qquad w(x,y) = xy.$$

1. Notons g la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$g(x,y) = \left(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\right).$$

g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ puisque ses fonctions composantes u, v et w sont des fonctions polynômiales.

Les fonctions $(u, v, w) \mapsto uv$ et $(u, v, w) \mapsto w$ sont différentiables sur $\mathbb{R}^3$ comme fonctions polynômiales.

Par composition avec les fonctions exp et sin, les fonctions $(u, v, w) \mapsto e^{uv}$ et $(u, v, w) \mapsto \sin w$ sont différentiables sur $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^3$.

0,5

Enfin, $F = f \circ g$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ en tant que composée de deux fonctions différentiables.

Par suite, F admet des dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et ces dérivées sont données par la règle de la chaîne :

1

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}\Big(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\Big)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\Big(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\Big)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial w}\Big(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\Big)\frac{\partial w}{\partial x}(x,y),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}\Big(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\Big)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\Big(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\Big)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial w}\Big(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\Big)\frac{\partial w}{\partial y}(x,y).\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w) = ve^{uv}\sin(w), \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w) = ue^{uv}\sin(w), \quad \frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w) = e^{uv}\cos(w),$$

0,5

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = y, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -1, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x,y) = x.\end{aligned}$$

d'où, en substituant

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= 2xve^{uv}\sin(w) + ue^{uv}\sin(w) + ye^{uv}\cos(w) \\ &= e^{(x^2+y^2)(x-y)}\left((3x^2 - 2xy + y^2)\sin(xy) + y\cos(xy)\right),\end{aligned}$$

0,5

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= 2yve^{uv}\sin(w) - ue^{uv}\sin(w) + xe^{uv}\cos(w) \\ &= e^{(x^2+y^2)(x-y)}\left((2xy - 3y^2 - x^2)\sin(xy) + x\cos(xy)\right).\end{aligned}$$

2. Calculons

0,25

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(0,1) &= e^{-1}(1.\sin 0 + 1.\cos 0) = e^{-1}, \\
\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) &= e^{-1}(-3.\sin 0 + 0.\cos 0) = 0,
\end{aligned}$$

0,25

par suite, le vecteur gradient de F au point $(0,1)$ est

$$\nabla F(0,1) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(0,1), \frac{\partial F}{\partial y}(0,1)\right) = (e^{-1}, 0).$$

Solution 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x,y) = (e^x + y, x + y^3)$.

0,5

1. On veut appliquer <u>*le théorème d'inversion locale*</u>. Pour cela, on observe que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ puisque ses fonctions composantes $f_1 : (x,y) \mapsto e^x + y$ et $f_2 : (x,y) \mapsto x + y^3$ le sont,

0,5

et on calcule les dérivées partielles de f pour écrire la matrice jacobienne

$$\mathbf{J}(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 1 \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}.$$

0,5

Ainsi, le jacobien de f au point $(0,0)$ est

$$\det\left(\mathbf{J}(f)_{(0,0)}\right) = \begin{vmatrix} e^0 & 1 \\ 1 & 3.0^2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

0,5

Le théorème d'inversion locale s'applique, et nous permet de déduire qu'il existe un ouvert U contenant le point $(0,0)$ tel que la restriction $f|_U$ soit un C^1−difféomorphisme de U sur $f(U)$.

0,5

2. Matrice jacobienne $J(g)_{(1,0)}$ de g au point $(1,0)$. Le théorème d'inversion locale nous permet également de déduire que

$$\mathbf{J}(g)_{f(x,y)} = \left[\mathbf{J}(f)_{(x,y)}\right]^{-1} \qquad \forall (x,y) \in U.$$

0,5

En particulier, sachant que $f(0,0) = (1,0)$,

$$\mathbf{J}(g)_{(1,0)} = \left[\mathbf{J}(f)_{(0,0)}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\left(\mathbf{J}(f)_{(0,0)}\right)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Calcul de $\frac{\partial g_1}{\partial u}(1,0)$ et $\frac{\partial g_2}{\partial v}(1,0)$. Par définition, on a

$$\mathbf{J}(g)_{(1,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(1,0) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(1,0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(1,0) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(1,0) \end{pmatrix}.$$

1 Par comparaison avec le résultat de la question précédente, on obtient

$$\frac{\partial g_1}{\partial u}(1,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g_2}{\partial v}(1,0) = -1.$$

Solution 4 Posons $f(x,y) = xe^y + ye^x$.

1. Les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont des fonctions de classe C^1 (et même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}^2$ comme fonctions polynômiales. Par composition avec la fonction exp, les fonctions $(x,y) \mapsto e^x$ et $(x,y) \mapsto e^y$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Il s'ensuit que les fonctions $(x,y) \mapsto ye^x$ et $(x,y) \mapsto xe^y$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que produit de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Enfin, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de deux fonctions de classe C^1. 0,5

   Si $(x_0, y_0) = (0,0)$ on a

   $$f(x_0,y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y + e^x \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 1 \neq 0.$$

   0,5

   Le *théorème des fonctions implicites* permet alors d'affirmer qu'il existe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant $x_0 = 0$, un intervalle ouvert J contenant $y_0 = 0$ et une fonction $\varphi : I \to J$ de classe C^1 tels que 0,5

   $$\forall (x,y) \in I \times J, \quad f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x).$$

2. Par définition de φ on a $\varphi(x_0) = y_0$, autrement dit $\varphi(0) = 0$. Par ailleurs, on a

   $$f(x, \varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

   En dérivant par rapport à la variable x, on obtient donc

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) = 0, \qquad \forall x \in I, \tag{1}$$

   d'où, en $x = 0$, sachant que $\varphi(0) = 0$, 1

   $$\varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}.$$

   Or,

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + ye^x \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1,$$

   par suite,

   $$\varphi'(0) = -1.$$

Comme f est de classe C^∞, par le théorème des fonctions implicites, φ est aussi de classe C^∞ sur I. Dérivons une seconde fois l'identité (1) par rapport à x :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,\varphi(x))\right) + \varphi''(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))$$

$$+\varphi'(x)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right) = 0, \qquad \forall x \in I,$$

i.e.,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\varphi(x)) + 2\varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\varphi(x))\left(\varphi'(x)\right)^2 + \varphi''(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

1

En $x = 0$, on obtient compte tenu de ce que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = -1$, et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + 2(-1)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)(-1)^2 + \varphi''(0) = 0,$$

d'où,

$$\varphi''(0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0). \qquad (2)$$

Or,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y\mathrm{e}^x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x\mathrm{e}^y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y,$$

et donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 2,$$

d'où, par substitution dans (2),

$$\varphi''(0) = 4.$$

0,25

3. Comme φ est de classe C^∞ sur I, elle admet un développement limité de tout ordre en 0. Son développement limité à l'ordre 2 en 0 est

0,25

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(0) + x\varphi'(0) + \varphi''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= -x + 2x^2 + o\left(x^2\right).\end{aligned}$$

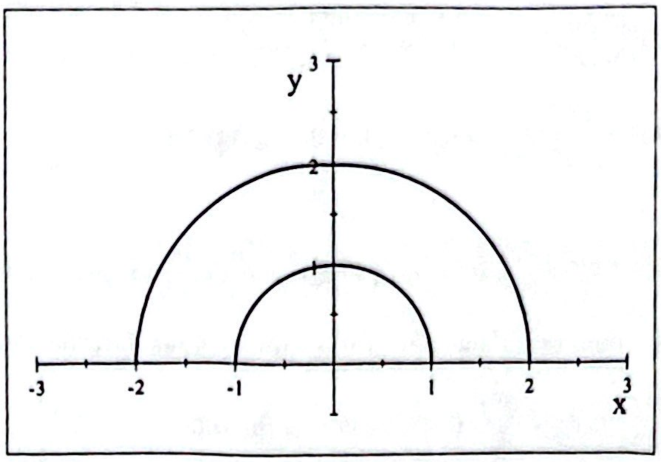
Solution 5 Soit D le domaine plan défini par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \ y \geq 0\right\},$$

et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2).$$

a) *Représentation graphique de D.* D est la région du plan comprise entre les deux demi-cercles dans la figure ci-dessous, y compris le contour.



0,5

b) *Calcul de l'intégrale double* $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Evidemment D est un compact simple du moment qu'il se laisse décrire comme suit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ -2 \le x \le 2 \ \text{ et } \ \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x)\},$$

0,5

où

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-2,-1] \cup [1,2] \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in [-1,1] \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \psi_2(x) = \sqrt{4-x^2} \text{ pour } x \in [-2,2]$$

sont des fonctions continues sur $[-2,2]$ avec $\psi_1 \le \psi_2$.

0,5

Par ailleurs, f est continue sur D comme produit de la fonction polynômiale $(x,y) \mapsto xy$ par la fonction $(x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2)$ composée de la fonction ln avec la fonction polynômiale $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ à valeurs strictement positives sur D.

Faisons un passage en coordonnées polaires

$$\Phi : (r,\theta) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi[\mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

On a

0,5

$$\begin{aligned} D' &= \Phi^{-1}(D) = \{(r,\theta) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi[\ ; \ \Phi(r,\theta) \in D\} \\ &= \{(r,\theta) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi[\ ; \ 1 \le r^2 \le 4, \ \sin\theta \ge 0\} \\ &= \{(r,\theta) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi[\ ; \ 1 \le r \le 2, \ 0 \le \theta \le \pi\} \\ &= [1,2] \times [0,\pi]. \end{aligned}$$

Comme D est un compact simple et f est continue sur D, <u>*le théorème de changement de variables*</u> s'applique pour donner :

0,5

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \iint\limits_{[1,2]\times[0,\pi]} (r^2\cos\theta\,\sin\theta)\ln(r^2)\, r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

ce qui entraîne, par <u>le théorème de de Fubini</u>,

0,5

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_1^2 r^3\ln(r^2)\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right).$$

Comme

$$\int_0^{\pi}\sin\theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\,(\sin\theta) = \left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\pi} = 0$$

0,5

il vient

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$