Université Larbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi

Licence 2 - Mathématiques — Année universitaire 2024/2025

Examen d'Analyse 4 - Version A — 07 mai 2025

Durée : 01H30mn

Documents non autorisés - Téléphones portables éteints

Exercice 1 (3,25 points) *Soient la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x\mathrm{e}^{3y}$ et le vecteur* $\mathbf{v} = (3,4)$.

1. *Expliquer (en détail) pourquoi f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Calculer les dérivées partielles de f au point $(2,1)$. En déduire la différentielle de f en ce point.*
3. *Calculer le nombre $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(2,1)$ en utilisant la définition de la dérivée directionnelle (dérivée selon un vecteur).*
4. *Calculer le nombre $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(2,1)$ en utilisant la différentielle $\mathrm{d}f_{(2,1)}$.*

Exercice 2 (4 points) *Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, vérifiant*

$$\begin{aligned} g(0,1) &= 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0,1) = -1, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = 0, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,1) &= 1, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,1) = 3, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,1) = 2. \end{aligned}$$

1. *Déterminer le vecteur gradient et la matrice hessienne de g en $(0,1)$.*
2. *Ecrire le développement de Taylor-Young d'ordre 2 de g au voisinage de $(0,1)$.*
3. *On pose pour tout réel t, $f(t) = g\left(t, \mathrm{e}^t\right)$. En utilisant la règle de dérivation en chaîne, calculer $f'(t)$ en fonction des dérivées partielles de g.*

   En déduire $f'(0)$.

Exercice 3 (3,25 points) *Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $g(x,y) = (2x+y, x^2-y^2)$.*

1. *Montrer qu'il existe un ouvert U contenant le point $(2,1)$ tel que la restriction $g|_U$ soit un C^1-difféomorphisme de U sur $g(U)$.*
2. *Calculer $g(2,1)$. En déduire la matrice jacobienne de $\left(g|_U\right)^{-1}$ au point $(5,3)$.*

Exercice 4 (5 points)

1. *Montrer que l'équation*

$$z^2 \mathrm{e}^{zx} + 2zy^2 - 1 = 0$$

définit localement z *comme une fonction* $z = \varphi(x, y)$ *de classe* C^1 *au voisinage du point* $(0, 0, 1)$*.*

2. *Posons* $f(x, y, z) = z^2 \mathrm{e}^{zx} + 2zy^2 - 1$*. En dérivant l'expression* $f(x, y, \varphi(x, y))$*, calculer les dérivées partielles premières de* φ *au point* $(0, 0)$*.*

3. *En déduire le développement limité à l'ordre* 1 *de* φ *au voisinage de* $(0, 0)$*, puis approcher la valeur* $\varphi(0.03, -0.04)$ *(si elle existe).*

Exercice 5 (4,5 points) *Soit* D *le domaine plan défini par*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geq y \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq \pi^2\right\},$$

et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$f(x, y) = x \cos \sqrt{x^2 + y^2}.$$

a) *Dessiner le domaine* D*.*

b) *L'ensemble* D *est-il compact ? Pourquoi ?*

c) *En utilisant un passage en coordonnées polaires, calculer l'intégrale double* $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$*.*

Corrigé de l'examen d'Analyse 4 - Version A

Solution 1 Soient la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xe^{3y}$ et le vecteur $\mathbf{v} = (3,4)$.

0,5

1

1. Les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto 3y$ sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ comme fonctions polynômiales.

   Par composition avec la fonction exp laquelle est différentiable sur $\mathbb{R}$, la fonction $(x,y) \mapsto e^{3y}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

   Enfin, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ en tant que produit de deux fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2$.

0,5

1

2. Comme f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, elle admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ces dérivées sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{3y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3xe^{3y},$$

0,25

1

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = e^3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 6e^3.$$

0,5

1

La différentielle de f au point $(2,1)$ est donc l'application $\mathrm{d}f_{(2,1)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\mathrm{d}f_{(2,1)}(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)h_2 = e^3 h_1 + 6e^3 h_2, \qquad (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2.$$

0,5

1

3. Calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(2,1)$ en utilisant la définition de la dérivée selon un vecteur :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(2,1) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((2,1)+t\mathbf{v}) - f(2,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(2+3t, 1+4t) - f(2,1)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(2+3t)e^{3(1+4t)} - 2e^3}{t},\end{aligned}$$

0,5

1

ce qui donne, par la règle de l'Hôpital,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(2,1) = \lim_{t\to 0}\left(3e^{3(1+4t)} + 12(2+3t)e^{3(1+4t)}\right) = 27e^3.$$

0,5

1

4. Calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(2,1)$ en utilisant la différentielle $\mathrm{d}f_{(2,1)}$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(2,1) = \mathrm{d}f_{(2,1)}(v) = \mathrm{d}f_{(2,1)}(3,4) = 3e^3 + 24e^3 = 27e^3.$$

Solution 2 Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, vérifiant

$$g(0,1) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0,1) = -1, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,1) = 1, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,1) = 3, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,1) = 2.$$

1. Vecteur gradient.

0,25

$$\nabla g(0,1) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(0,1), \frac{\partial g}{\partial y}(0,1)\right) = (-1,0).$$

0,25

Matrice hessienne. Comme g est une fonction de classe C^2, on a en vertu du théorème de Schwarz, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,1) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,1)$, d'où

0,5

$$\mathrm{H}_g(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,1) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,1) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,1) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Développement de Taylor-Young d'ordre 2 de g en $(0,1)$. Comme g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, elle admet en $(0,1)$ un développement de Taylor-Young d'ordre 2. Pour (x,y) voisin de $(0,1)$, ce développement est donné par :

0,25

0,75

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= g\left((0,1) + (x, y-1)\right) \\
&= g(0,1) + \nabla g(0,1) \cdot (x, y-1) + \frac{1}{2}(x, y-1)\mathrm{H}_g(0,1)\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + o\left(\|(x,y-1)\|_2^2\right) \\
&= 1 + (-1,0) \cdot (x, y-1) + \frac{1}{2}(x, y-1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + o\left(x^2 + (y-1)^2\right) \\
&= 1 - x + \frac{1}{2}(x, y-1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + o\left(x^2 + (y-1)^2\right) \\
&= 1 - x + \frac{1}{2}(x, y-1)\begin{pmatrix} x + 2(y-1) \\ 2x + 3(y-1) \end{pmatrix} + o\left(x^2 + (y-1)^2\right) \\
&= 1 - x + \frac{1}{2}\left[x\left(x + 2(y-1)\right) + (y-1)\left(2x + 3(y-1)\right)\right] + o\left(x^2 + (y-1)^2\right) \\
&= 1 - x + \frac{1}{2}\left(x^2 + 4x(y-1) + 3(y-1)^2\right) + o\left(x^2 + (y-1)^2\right) \\
&= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + 2x(y-1) + \frac{3}{2}(y-1)^2 + o\left(x^2 + (y-1)^2\right).
\end{aligned}$$

0,5

3. On pose pour tout réel t, $f(t) = g\left(t, \mathrm{e}^t\right)$.

0,5

Introduisons les fonctions $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $h_1(t) = t$ et $h_2(t) = \mathrm{e}^t$.
La fonction $h = (h_1, h_2)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car ses composantes le sont. Par composition, $f = g \circ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et donc différentiable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la dérivée première f' est donnée en chaque point $t \in \mathbb{R}$ par la règle de la chaîne comme suit :

0,5

$$f'(t) = (g \circ h)'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}\left(h_1(t), h_2(t)\right) h_1'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}\left(h_1(t), h_2(t)\right) h_2'(t).$$

0,25 En observant que $h_1'(t) = 1$ et $h_2'(t) = \mathrm{e}^t$, il vient

$$f'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}\left(t, \mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^t \frac{\partial g}{\partial y}\left(t, \mathrm{e}^t\right),$$

0,25 d'où, pour $t = 0$,

$$f'(0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,1) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = -1.$$

Solution 3 Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $g(x,y) = (2x+y, x^2-y^2)$.

0,5 *1.* On veut appliquer le théorème d'inversion locale. Pour cela, on observe que la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ puisque ses composantes $g_1 : (x,y) \mapsto 2x+y$ et $g_2 : (x,y) \mapsto x^2-y^2$ sont des fonctions polynômiales,

0,5 et on calcule les dérivées partielles de g pour écrire la matrice jacobienne

$$\mathbf{J}(g)_{(2,1)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(2,1) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(2,1) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(2,1) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2(2) & -2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

0,5 Ainsi, le jacobien de g au point $(2,1)$ est $\det\left(\mathbf{J}(g)_{(2,1)}\right) = -8 \neq 0.$ Le théorème d'inversion
0,5 locale s'applique, et nous permet de déduire qu'il existe un ouvert U contenant le point $(2,1)$ tel que la restriction $g|_U$ soit un C^1-difféomorphisme de U sur $g(U)$.

0,5 *2.* Le théorème d'inversion locale nous permet également de déduire

$$\mathbf{J}\left[(g|_U)^{-1}\right]_{g(x,y)} = \left[\mathbf{J}\left(g|_U\right)_{(x,y)}\right]^{-1} = \left[\mathbf{J}\left(g\right)_{(x,y)}\right]^{-1} \qquad \forall (x,y) \in U.$$

En particulier, sachant que $g(2,1) = (5,3)$,

0,25

$$\mathbf{J}\left[(g|_U)^{-1}\right]_{(5,3)} = \left[\mathbf{J}\left(g\right)_{(2,1)}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

0,5

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Solution 4 Posons $f(x,y,z) = z^2 \mathrm{e}^{zx} + 2zy^2 - 1$.

0,5 *1.* La fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ est de classe C^1 (et même C^∞) en tant que somme de la fonction polynômiale $(x,y,z) \mapsto 2zy^2 - 1$ et de la fonction $(x,y,z) \mapsto z^2\mathrm{e}^{zx}$ elle même de classe C^1 comme produit de la fonction polynômiale $(x,y,z) \mapsto z^2$ avec la composée de la fonction polynômiale $(x,y,z) \mapsto zx$ avec la fonction exp.

0,75

Si $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$ on a

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2ze^{zx} + xz^2e^{zx} + 2y^2 \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 2 \neq 0.$$

0,75

Le théorème des fonctions implicites permet alors d'affirmer qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant $(x_0, y_0) = (0, 0)$, un intervalle ouvert J contenant $z_0 = 1$ et une fonction $\varphi : U \to J$ de classe C^1 tels que

$$\forall (x, y, z) \in U \times J, \quad f(x, y, z) = 0 \iff z = \varphi(x, y).$$

0,25

2. Par définition de φ on a $\varphi(x_0, y_0) = z_0$, autrement dit $\varphi(0, 0) = 1$.

0,5

Par ailleurs, on a

$$f(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \quad \forall (x, y) \in U.$$

En dérivant par rapport à la variable x, on obtient donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y)) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \qquad \forall (x, y) \in U,$$

0,5

d'où, en $(x, y) = (0, 0)$, sachant que $\varphi(0, 0) = 1$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1)}.$$

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = z^3e^{zx} \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 1) = 1,$$

0,25

par suite,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = -\frac{1}{2}.$$

0,5

La formule pour la dérivée partielle par rapport à y est analogue et donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1)},$$

0,25

ce qui donne sachant que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 4zy$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

0,25

3. Comme φ est de classe C^1 sur U, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$. Pour (x,y) voisin de $(0,0)$, ce développement est donné par :

0,25

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \varphi(0,0) + x\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0) + o(\|(x,y)\|_2) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).\end{aligned}$$

0,25

En négligeant le reste on obtient l'approximation

$$\varphi(0.03,-0.04) \simeq 1 - \frac{0.03}{2} = 1 - 0.015 = 0.985.$$

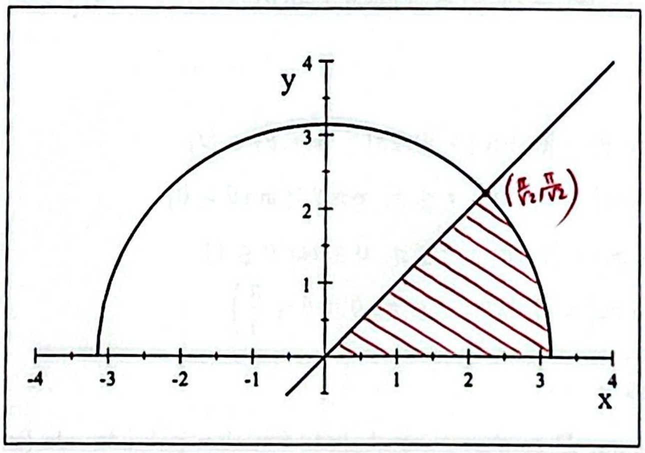
(On note que la méthode ne donne aucune idée de la taille du voisinage U, donc on ne sait pas si $\varphi(0.03,-0.04)$ est vraiment défini, et si par chance c'est le cas, on n'a aucune idée de l'erreur commise par cette approximation !!).

Solution 5 Soit D le domaine plan défini par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geq y \geq 0, \ x^2+y^2 \leq \pi^2\right\}.$$

a) Représentation graphique de D. D est la région hachurée du plan dans la figure ci-dessous, y compris le contour.

0,5



0,25

b) Compacité de D. L'ensemble D est borné car inclus dans $\overline{B}_2((0,0),\pi)$ (boule fermée centrée à l'origine et de rayon π pour la norme euclidienne).

L'ensemble D est fermé. En effet,

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x-y \geq 0, \ y \geq 0, \ \pi^2 - (x^2+y^2) \geq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x-y \in [0,+\infty[, \ y \in [0,+\infty[, \ \pi^2 - (x^2+y^2) \in [0,+\infty[\right\} \\ &= a^{-1}([0,+\infty[) \cap b^{-1}([0,+\infty[) \cap c^{-1}([0,+\infty[) \end{aligned}$$

où

$$a(x,y) = x - y, \quad b(x,y) = y \quad \text{et} \quad c(x,y) = \pi^2 - (x^2 + y^2).$$

0,5

Les fonctions a, b et c sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (car polynômiales) et $[0, +\infty[$ est fermé dans $\mathbb{R}$ donc $a^{-1}([0, +\infty[)$, $b^{-1}([0, +\infty[)$ et $c^{-1}([0, +\infty[)$ sont fermés dans $\mathbb{R}^2$. Enfin, D est fermé comme intersection de fermés.

D est donc compact.

c) <u>Calcul de l'intégrale double $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.</u> D est un compact simple. En effet, chechons les l'ordonnée du point d'intersection de la droite $y = x$ avec le cercle d'équation $x^2 + y^2 = \pi^2$ dans le premier quadrant.

0,5

$$\sqrt{\pi^2 - y^2} = y \iff \begin{cases} \pi^2 - y^2 = y^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y^2 = \pi^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \iff y = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi, D peut être décrit comme suit

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \text{ et } y \leq x \leq \sqrt{\pi^2 - y^2}\right\}.$$

Faisons un passage en coordonnées polaires

$$\Phi : (r, \theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

On a

0,5

$$\begin{aligned}
D' &= \Phi^{-1}(D) = \{(r,\theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\; ; \; \Phi(r,\theta) \in D\} \\
&= \{(r,\theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\; ; \; r \leq \pi, \; \cos\theta \geq \sin\theta \geq 0\} \\
&= \{(r,\theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\; ; \; r \leq \pi, \; 0 \leq \tan\theta \leq 1\} \\
&= \left\{(r,\theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\; ; \; r \leq \pi, \; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\} \\
&= [0, \pi] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right].
\end{aligned}$$

0,5

Par ailleurs, f est continue sur D comme produit de la fonction polynômiale $(x,y) \mapsto x$ par la fonction $(x,y) \mapsto \cos\sqrt{x^2 + y^2}$ composée de la fonction polynômiale $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ à valeurs positives sur D avec la fonction racine carrée puis la fonction cos. D'après le théorème de changement de variables, on donc

0,5

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \iint_{[0,\pi]\times[0,\frac{\pi}{4}]} (r\cos\theta\,\cos r)\, r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

0,5/1

ce qui donne par le théorème de Fubini,

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y == \left(\int_0^{\pi} r^2 \cos r\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right).$$

0,5/1

En faisant deux intégrations par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} r^2 \cos r\,\mathrm{d}r &= \left[r^2 \sin r\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2r \sin r\,\mathrm{d}r = \int_0^{\pi} 2r(-\sin r)\,\mathrm{d}r \\ &= \left[2r\cos r\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\cos r\,\mathrm{d}r \\ &= -2\pi - \left[2\sin r\right]_0^{\pi} = -2\pi.\end{aligned}$$

0,25/1

Par ailleurs,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

de sorte que

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\pi\frac{\sqrt{2}}{2} = -\pi\sqrt{2}.$$