Corrige -type : Équations aux dérivées Partielles

Exercice 01.

1. On pose $u(x,t) = X(x)Y(y)$, on trouve

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(x)}{Y(x)} = -\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad . \qquad \boxed{0.5}$$

D'autre part, on a

$u(0,y) = 0 \Longrightarrow X(0)Y(y) = 0 \Longrightarrow \mathbf{X(0) = 0}.$

$u(1,y) = 0 \Longrightarrow X(1)Y(y) = 0 \Longrightarrow \mathbf{X(1) = 0}.$ $\boxed{0.5}$

$u(x,0) = 0 \Longrightarrow X(x)Y(0) = 0 \Longrightarrow \mathbf{Y(1) = 0}.$

Par conséquent,

$$(P_1) \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in]0,1[, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases} \qquad \boxed{0.5} \qquad \begin{cases} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, & x \in]0,1[, \\ Y(1) = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre (P_1). On a

Si $\lambda = 0$: $X(x) = a + bx$. $X(0) = X(1) = 0 \Longrightarrow a = b = 0$. Donc, $X \equiv 0$. $\boxed{0.5}$

Si $\lambda < 0$: $X(x) = ae^{-\sqrt{-\lambda}\,x} + be^{\sqrt{-\lambda}\,x}$. $X(0) = 0 \Longrightarrow a = -b$ et $X(1) = 0 \Longrightarrow b = 0$. Donc, $X \equiv 0$. $\boxed{0.5}$

Si $\lambda > 0$: $X(x) = a\cos\sqrt{\lambda}\,x + b\sin\sqrt{\lambda}\,x$. $X(0) = 0 \Longrightarrow a = 0$.

$$X(1) = 0 \Longrightarrow \underbrace{b}_{\neq 0} \sin\sqrt{\lambda} = 0 \Longrightarrow \sin\sqrt{\lambda} = 0 \Longrightarrow \sqrt{\lambda} = n\pi, \ n \geq 1. \quad \boxed{0.5}$$

$$\text{Donc, } X_n(x) = \sin(n\pi x), \ \sqrt{\lambda_n} = n\pi, \ n \geq 1. \boxed{0.5}$$

3. Résoudre (P_2) pour $\lambda := \lambda_n = (n\pi)^2$, $n \geq 1$. On a

$Y(y) = ce^{-\sqrt{\lambda}\,y} + de^{\sqrt{\lambda}\,y}$. $y(0) = 0 \Longrightarrow c = -d \Longrightarrow Y_n(y) = k_n \sinh(n\pi y)$, $\quad n \geq 1$. $\boxed{0.5} + \boxed{0.5}$

4. On déduit que la solution générale de **l'équation de Laplace** sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) K_n \sinh(n\pi y). \quad \boxed{1}$$

On utilise la condition initiale

$$u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) k_n \sinh(n\pi) = x. \quad \boxed{0.5}$$

Cette dernière série de fonctions n'est autre que la série de **Fourier impaire** de la donnée initiale

$$k_n = \frac{2}{\sinh(n\pi)} \int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi\sinh(n\pi)}. \boxed{1}$$

Par conséquent,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n\pi\sinh(n\pi)} \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y). \quad \boxed{0.5}$$

Exercice 02.

1. La solution générale

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}):=\frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+\sqrt{2}t\right)+f\left(x-\sqrt{2}t\right)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-\sqrt{2}t}^{x+\sqrt{2}t}\psi(s)ds. \qquad \boxed{2}$$

2.

$$\mathrm{u}\left(\sqrt{2},1\right)=\frac{1}{2}\left[\varphi\left(2\sqrt{2}\right)+\varphi(0)\right]+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\sqrt{2}}\psi(s)ds=\frac{1}{2}\left[2\sqrt{2}+0\right]+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 0ds+\frac{1}{2}\int_1^{2\sqrt{2}}sds$$

$$=\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{s^2}{2}\right]_1^{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left[4-\frac{1}{2}\right]=\sqrt{2}+\frac{7}{4}. \qquad \boxed{1.5}$$

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{u}(x,t)=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\varphi\left(x+\sqrt{2}\,t\right)+\varphi\left(x-\sqrt{2}\,t\right)\right]+\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{t\to\infty}\int_{x-\sqrt{2}\,t}^{x+\sqrt{2}\,t}\psi(s)\mathrm{ds}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\underbrace{\varphi(\infty)}_{\infty}+\underbrace{\varphi(-\infty)}_{0}\right]+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(s)\mathrm{ds}=\infty+\frac{1}{2\sqrt{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{1}\psi(s)ds}_{+\infty}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\underbrace{\int_1^{\infty}\mathrm{g}(s)\mathrm{ds}}_{+\infty}=+\infty. \qquad \boxed{1.5}$$

Exercice 03.

1. En multipliant (P) par u et intégrant sur $(0,\ell)$, on trouve

$$\int_0^{\ell}u_t\,udx-\int_0^{\ell}u_{xx}\,udx=\mathrm{k}\int_0^{\ell}u^2\,dx. \qquad (1) \qquad \boxed{1}$$

En intégrant par partie, on obtient

$$\int_0^{\ell}u_t\,udx=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\ell}u^2\,dx\right]. \qquad (2) \qquad \boxed{0.5}$$

$$\int_0^{\ell}u_{xx}\,udx=u_xu\,|_0^{\ell}-\int_0^{\ell}u_x^2\,dx=u_x(\ell,t)\underbrace{u(\ell,t)}_{0}-\underbrace{u_x(0,t)}_{0}u(0,t)-\int_0^{\ell}u_x^2\,dx=-\int_0^{\ell}u_x^2\,dx. \quad (3) \qquad \boxed{1}$$

En substituant $(2)-(3)$ dans (1), on trouve

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\ell}u^2\,dx\right]+\int_0^{\ell}u_x^2\,dx=\mathrm{k}\int_0^{\ell}u^2\,dx\Longrightarrow E'(t)=-\int_0^{\ell}u_x^2\,dx+\mathrm{k}\int_0^{\ell}u^2\,dx\le\mathrm{k}\int_0^{\ell}u^2\,dx. \qquad (4) \ \boxed{1}$$

En intégrant par partie sur $(0,t)$, on obtient

$$E(t)\le E(0)+\mathrm{k}\int_0^t\int_0^{\ell}u^2(s)dx\,ds=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\varphi^2(x)dx+\mathrm{k}\int_0^t\int_0^{\ell}u^2(s)dx\,ds. \qquad \boxed{1}$$

2. Soit u_1 et u_2 deux solutions au problème (P). Alors, $w:=u_1-u_2$ est une solution du problème $\boxed{0.5}$

$$\boxed{0.5}\,(\mathrm{P}_1)\begin{cases}w_t-w_{xx}=0, & 0<x<\ell, t>0,\\ w_x(0,t)=w(\ell,t)=0, & t>0,\\ w(x,0)=0, & 0<x<\ell,\end{cases}$$

D'âpre la question 1, on a

$E(t)\le E(0)$ et $E(0)=0$ il s'ensuit que $\mathrm{E}\equiv 0$. $\boxed{0.5}+\boxed{0.5}+\boxed{0.5}$

Par conséquent, $w(x,t)=u_1-u_2\equiv 0,\ \forall t\ge 0$ et l'unicité est prouvée. $\boxed{0.5}$