كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

السنة الجامعية : 2025/2024

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

المدة: ساعة و نصف الساعة

المستوى : (1ج م+1رياضيات+1إعلام آلي)

الإمتحان الاستدراكي للسداسي الثاني–التحليل 2 (طلبة الديون).

التمرين الأول:(12 نقطة)

1) ليكن التابع f المعرف بـ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-e^{x}}{\ln(1+x+x^{2})-x}, & x\neq 0\\ -2, & x=0\end{cases}$، نرمز بـ (C_f) للمنحنى البياني الممثل له.

ا) (2+1.5 نقطة) أوجد نشرا محدودا من المرتبة 3 بجوار 0 لكل من التوابع:

$$. v(x)=\ln(1+x+x^{2})-x \ , \ u(x)=\sqrt{1+2\sin x}-e^{x}$$

ب) (1+1.5 نقطة) باستعمال النشور السابقة أحسب النهاية: $\lim_{x\to 0} f(x)$ ثم استنتج أن f يقبل الاشتقاق عند 0.

ج) (1+0.5 نقطة) استنتج نشرا محدودا بجوار 0 من الرتبة 1 للتابع f ثم عين معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مما المنحنى (C_f) في النقطة $A(0,-2)$.

2) ليكن التابع g المعرف بـ $g(x)=x^{2}\arctan(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2}})$، نرمز بـ (C_g) للمنحنى البياني الممثل له.

ا) (1+1.5 نقطة) أوجد نشرا محدودا من المرتبة 3 بجوار 0 للتابع $h(t)=\arctan(t^{2}+t)$ ثم استنتج نش محدودا بجوار ∞ للتابع g.

ب) (2 نقطة) بين أن المنحنى البياني (C_g) يقبل مستقيم مقارب (Δ) في جوار∞ يطلب تعيين معادلة له ثم حد الوضع النسبي لكل من (C_g) و(Δ) في جوار ∞.

يعطى: $e^{x}=1+x+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{6}x^{3}+o(x^{3})$ ، $\sin x=x-\frac{1}{6}x^{3}+o(x^{3})$ ،

$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^{2}+\frac{1}{16}x^{3}+o(x^{3})$ ، $\arctan x=x-\frac{1}{3}x^{3}+o(x^{3})$ ،

$$.\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{3}x^{3}+o(x^{3})$$

التمرين الثاني:(4 نقاط)

أحسب التكاملات التالية:

1) (2 نقطة) $I=\int\frac{x^{2}+1}{x^{2}(x+1)}dx$ (ضع $\frac{x^{2}+1}{x^{2}(x+1)}=\frac{a}{x^{2}}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}$).

2) (2 نقطة) $J=\int_{1}^{2}x\sqrt{x-1}\,dx$ (ضع $t=\sqrt{x-1}$).

التمرين الثالث:(4 نقاط)

حل المعادلة التفاضلية التالية: $xy'-y=x^{3}e^{x}$.

الحل النموذجي:

التمرين الأول: (8ن)

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + 2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\,dx$$ 0,25

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{1+2\cos x}{1+\cos^2 x}\sin x\,dx$$ 0,5

نضع: $\cos x = t$ ، $\cos 0 = 1$ ، $\cos \pi/2 = 0$ 0,5 ; $\left(\frac{dt}{dx} = -\sin x\right)$

$$I_1 = -\int_1^0 \frac{1+2t}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1+2t}{1+t^2}\,dt$$ 0,5 0,25

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \left[\arctan t + \ln(1+t^2)\right]_0^1$$ 0,25 0,25 0,25

$$I_1 = (\arctan 1 + \ln 2) - (\arctan 0 + \ln 1)$$

$$\boxed{I_1 = \pi/4 + \ln 2}$$ 0,25

$$I_2 = \int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1-1}{x^2-x+1}\,dx$$ 0,25

$$I_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$ 0,5 0,25

$$I_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right)^2+1\right]}\,dx$$ 0,25

$$I_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\times\frac{2}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$$ 0,25

$$I_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right) + c$$ 0,25

(نضع: $t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})$ ، $\frac{dt}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ أي $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$) 0,25

$I_3 = \int x^2 e^x \, dx.$

نكامل بالتجزئة:

0,25 $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x.$
$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$ $\Big\} \Rightarrow I_3 = x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx.$ 0,5

نكامل بالتجزئة مرة أخرى:

0,25 $u = x \Rightarrow u' = 1$
$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$ $\Big\} \Rightarrow I_3 = x^2 e^x - 2\left[x e^x - \int e^x \, dx\right].$ 0,5

$$I_3 = (x^2 - 2x + 2)\, e^x + c$$. 0,5

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n\left(\frac{2k}{n}+1\right)}{n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2\frac{k}{n}+1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

0,25 0,25

$$= \int_0^1 \frac{2x+1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} + \ln 2.$$

0,25 0,25

التمرين الثاني:

1/ $y' = \frac{x^2+xy-y^2}{x(x-y)}$. ...(*)

$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 xy - \lambda^2 y^2}{\lambda x(\lambda x - \lambda y)} = \frac{x^2+xy-y^2}{x(x-y)}.$ 0,5

المعادلة التفاضلية (*) متجانسة:

نضع:

$y = zx.$

$y' = z'x + z.$ 0,25

$z'x + z = \frac{x^2 + x\,zx - (zx)^2}{x(x - zx)}.$ 0,25

$z'x + z = \frac{1+z-z^2}{1-z}$ 0,25

$z'x = \frac{1+z-z^2}{1-z} - z.$ 0,25

$z'x = \frac{1}{1-z}$

$z'(1-z) = \frac{1}{x}$ 0,25

$\int (1-z)\, dz = \int \frac{1}{x}\, dx$

$z - \frac{1}{2} z^2 = \ln|x| + c.$ 0,25

$\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln|x| + c$ 0,25

نكتفي بهذه العبارة لا يطلب التبسيط أكثر.

ب/ $xy' - y = x^4 e^x$ . ...(*)

1/ حل المعادلة المتجانسة دون طرف ثاني :

$xy' - y = 0$ 0,25 $\Rightarrow xy' = y$ 0,25 $\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$ 0,25 $\Rightarrow \boxed{y_G = c(x)}$ 0,25

xy'

2/ تقوم بتغيير الثابت C :

$y_H = C(x) \cdot x$ 0,25 $\Rightarrow y_H' = C'(x) \cdot x + C(x)$ 0,25

نعوض في المعادلة 4 :

$x(C'(x)x + C(x)) - C(x)x = x^4 e^x$ 0,25

$C'(x)x^2 + xC(x) - C(x)x = x^4 e^x$ 0,25

$C'(x) = x^2 e^x$ 0,25 $\Rightarrow C(x) = \int x^2 e^x dx$ 0,25

$\Rightarrow = (x^2 - 2x + 2)e^x$ 0,5

$y_H = (x^3 - 2x^2 + 2x)e^x$ 0,5

$y = y_G + y_H = Cx + (x^3 - 2x^2 + 2x)e^x$ 0,5

التمرين الثالث (06)

1/

$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$

$= \ln\left(2\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\right)$ 0,5

$= \ln 2 + \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ 0,5

$= \ln 2 + \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2$

$+ \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)^3 + o(x^3)$ 0,5

$f(x) = \ln 2 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left[x^2 + x^3\right]$

$+ \frac{1}{3}\left(x^3\right) + o(x^3)$ 0,5

$f(x) = \ln 2 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ 0,5

ب/

$\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = -\frac{1}{6} \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1$ 1

جـ/

$(T): y = x + \ln 2$ 1,5

د) إذا كان $x < 0$ فإن $-\frac{1}{6}x^3 > 0$ وبالتالي 0,5

إذا كان $x > 0$ فإن $-\frac{1}{6}x^3 < 0$ 0,5

(C_f) فوق (Δ)
(C_f) تحت (Δ)

نقطة انعطاف $A(0, \ln 2)$