جامعة العربي بن مهيدي - أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة و الحياة

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

السنة الأولى ماستر رياضيات تطبيقية — مسؤول المادة: سليم روّار

العام الجامعي: 2024-2025 — مدة الامتحان: ساعة ونصف

امتحـــان مادة التحليل الدالي 02

أسئلة الفهم العام: (04 نقاط)

✓ بيّن أي القضايا الآتية صحيحة، مع تصحيح القضايا الخاطئة:

- ليكن E فضاء نظيميا، و A فضاء شعاعيا جزئيا منه. عندئذ يمكن تمديد كل شكل خطي f معرف على A إلى شكل خطي F معرّف على E كلّه.
- ليكن (E, d_E) فضاءً متريا، و a عنصر من E. إذا كان F جزءا متراصا من E ، فإنّ إسقاط a على F موجود ووحيد.
- نهاية كل متتالية من المؤثرات المتراصة المعرفة من فضاء هلبرتي E في فضاء هلبرتي F، هي مؤثر متراص.
- $\rho = 0$ قيمة طيفية للمؤثر الخطي A إذا كان المؤثر A تقابليا .

تمرين أول: (10 نقطة)

- بيّن أنّه حتى يكون فضاء نظيمي $(E, \|\ \|_E)$ فضاءً شبه هلبرتي يكفي أن يحقق نظيمه متطابقة متوازي الأضلاع .
- إذا كان H فضاءً شبه هلبرتيا، و (a_n) عائلة مستقلة خطيا منه.

بيّن أنه يمكن إنشاء عائلة متعامدة ومتجانسة تولّد نفس الفضاء الذي تولّده العائلة (a_n).

- إذا كان لدينا عائلة من أشعة متعامدة ومتجانسة مثنى مثنى $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ في فضاء شبه هلبرتي ، بيّن أنّ

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\|a_k\|^2$$

تمرين ثان (06 نقاط)

- نعرّف على الفضاء الهلبرتي $H = L^2([-1,1])$ المؤثر الخطي T المعرّف من أجل كل x من H كما يلي

$$(Tx)(t) = \int_{-1}^{1} e^{t+s}x(s)ds$$

  - أحسب المؤثر القرين ل T.

- ليكن لدينا المؤثر الخطي المعرّف كما يلي:

$$A: l^1(\mathbb{R}) \to l^1(\mathbb{R})$$
$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right).$$

  - أوجد القيم الذاتية للمؤثر A .

بالتوفيق والنجاح

التصحيح النموذجي لامتحان مادة التحليل الدالي 2

السنة الأولى ماستر - رياضيات

أسئلة الفهم العام $\frac{4}{4}$

القضية الأولى: خاطئة:
يجب أن يكون التشاكل الخطي f مستمرا على A.

القضية الثانية: قضية خاطئة
في حال كون F جزءا متراصا فإن الإسقاط العمودي لـ a على F ليس بالضرورة أن يكون وحيدا. (1)

القضية الثالثة: القضية صحيحة لأن فضاء المؤثرات المتراصة $K(E,F)$ هو فضاء شعاعي جزئي مغلق من $\mathcal{L}(E,F)$ (1)

القضية الرابعة: خاطئة (1)
$0=\infty$ هو قيمة طيفية للمؤثر A لأن A ليس تقابليا.

التمرين الأول: (3,5 pts)

(1) بيان أن تحقق شرط متطابقة متوازي الأضلاع هو شرط كاف لكون الفضاء النظيمي شبه هلبرتيا.

• نفرض أن متطابقة متوازي الأضلاع محققة.
نضع من أجل كل من x و y من E العلاقة:

$$\omega(x,y) = \langle x,y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \quad (0,5)$$

من أجل: $x = y$ نحصل:

$$\omega(x,x) = \|x\|^2 = \langle x,x \rangle$$

ولدينا: لأن $\|.\|$ نظيم

$$\omega(x,x) = \langle x,x \rangle > 0, \forall x \neq 0$$

وبالتالي ω معرف موجب (0,25)

1

ولدينا ـلـ متناظر 0,25 $\Rightarrow \forall (x,y)\in E : \sqcup(x,y) = \sqcup(y,x)$

خطية بالنسبة لـ x و y :

يكفي إثبات أن الدالة الآتية معدومة :

$$\cancel{\varphi(x,y,z) = \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|x+z\|^2}$$

نضع

$$\varphi(x,y,z) = 4\left(\langle x+y, z\rangle - \langle x,z\rangle - \langle y,z\rangle\right) \quad \forall x,y,z \in E \qquad (*)$$

0,25

يؤدي من $(*)$

$$\varphi(x,y,z) = \left[\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2\right] - \left[\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right] - \left[\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right] \qquad (**)$$

0,5

لدينا حسب متطابقة متوازي الأضلاع

- $\|x+z+y\|^2 = 2\left(\|x+z\|^2 + \|y\|^2\right) - \|x+z-y\|^2$ 0,25
- $\|x-z+y\|^2 = 2\left(\|x-z\|^2 + \|y\|^2\right) - \|x-z-y\|^2$ 0,25

وعليه

$$\varphi(x,y,z) = -\|x+z-y\|^2 + \|x-z-y\|^2 + \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 \qquad (***)$$

0,25

من $(**) + (***)$ نحصل على :

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}\left[\|x+y+z\|^2 + \|y+z-x\|^2\right] - \frac{1}{2}\left[\|y-z-x\|^2 + \|y-z+x\|^2\right] - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 \qquad (4)$$

0,25

حسب متطابقة متوازي الأضلاع لدينا

$\cdot \frac{1}{2}\left[\|(y+z)+x\|^2+\|(y+z)-x\|^2\right]=\|y+z\|^2+\|x\|^2$ 0,25

وكذلك

$\cdot \frac{1}{2}\left[\|(y-z)+x\|^2+\|(y-z)-x\|^2=\|y-z\|^2+\|x\|^2\right.$

وبالتالي 0,25

$\varphi(x,y,z)=0 \quad \forall x,y,z\in E$

ومنه:

$\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle \quad \forall y,z,x\in E.$ 0,25

• ونبرهن كذلك الخطية بالنسبة للمتغير الثاني، وكذا

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x,y\in E:\ \omega(\lambda x,y)=\lambda\,\omega(x,y)$ (3,5)

II - H فضاء شبه هلبرتي، و $(a_n)_n$ عائلة مستقلة خطيا منه.

طلبنا عائلة متعامدة ومتجانسة مولدة لنفس الفضاء المولد بواسطة (a_n).

نعرف العائلة $(b_n)_n$ كما يلي:

$$\begin{cases} b_0=a_0\neq 0 \\ b_n=a_n-P_{F_{n-1}}(a_n)\end{cases}$$ 0,1

حيث F_{n-1} هو الفضاء الشعاعي المولد بواسطة $(a_i)_{1\le i\le n-1}$

و $P_{F_{n-1}}$ هو تطبيق الإسقاط على F_{n-1}.

لدينا:

$\forall n,m:\ n>m$

$\langle b_n,b_m\rangle=\langle a_n-P_{F_{n-1}}(a_n),a_m-P_{m-1}(a_m)\rangle$ 0,5

(3) 0,5 $=\langle a_n-P_{F_{n-1}}(a_n),a_n\rangle-\langle a_n-P_{F_{n-1}}(a_n),P_{m-1}(a_m)\rangle$

$(*) = 0 - 0 = 0$

حسب مبرهنة الإسقاط :

$\forall x \in F : \langle a - b , x \rangle = 0$

ومنه 0,2

$\forall n, m \in \mathbb{N} : \langle b_n , b_m \rangle = 0$

لأن $\left(F_{m-1} \subset F_{n-1} \right)$

0,1

وعليه فإن (b_n) عائلة متعامدة ويمكن إنشاء عائلة متجانسة بوضع :

$$(C_n) = \left(\frac{b_n}{\|b_n\|} \right)_n$$

0,1

وبما أن (C_n) هي مزيج خطي من عناصر (a_n) فإنها تولد نفس الفضاء الذي تولده (a_n) .

(3pts) 0,1

III - بيان أن : من أجل أي أشعة متعامدة ومتجانسة من فضاء شبه هلبرتي $(a_k)_{1 \le k \le n}$ ، لدينا :

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|a_k\|^2$$

نبرهن بالتراجع :

من أجل $p = 2$ ، القضية صحيحة حسب مبرهنة فيثاغورث

نفرض أن القضية ~~صحيحة~~ صحيحة من أجل الرتبة n أي :

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|a_k\|^2$$

0,2

4 0,1

لدينا : $\left\| \sum_{k=1}^{m+1} a_k \right\|^2 = \left\| a_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} a_k \right\|^2$ 0,2

(حسب علاقة فيثاغورث)

(حسب الفرض) $= \| a_{m+1} \|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{m} a_k \right\|^2$ 0,2

$= \| a_{m+1} \|^2 + \sum_{k=1}^{m} \| a_k \|^2$ (حسب فرض التراجع) 0,1

$= \sum_{k=1}^{m+1} \| a_k \|^2 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$ 0,2

وبالتالي القضية صحيحة من الرتبة $m+1$ ومنه فالقضية صحيحة مهما كان $m \geq 2$.

التمرين الثاني (6 pts)

I. $H = L^2([-1,2])$ (3 pt pt)

$\forall x \in H : (Tx)(t) = \int_{-1}^{1} e^{t+s} x(s)\, ds$

حساب المؤثر القرين للمؤثر T

لدينا :

$\langle Tx, y \rangle = \int_{0}^{1} Tx(t) \overline{y(t)}\, dt$ 0,2

$= \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} e^{t+s} x(s)\, ds \right] \overline{y(t)}\, dt$ 0,2

5

$= \int_{-1}^{1} x(s) \left[\int_{-1}^{1} e^{t+s}\, \overline{y(t)}\, dt \right] ds$ حسب نظرية فوبيني 0,2

$= \int_{-1}^{1} x(s) \left[\int_{-1}^{1} \overline{e^{s+t} y(t)}\, dt \right] ds = \int_{-1}^{1} x(s) \overline{\int_{-1}^{1} e^{t+s} y(t)\, dt}\, ds$ 0,1 0,1

$$(*) = \langle x, Ty \rangle \Rightarrow T^* = T \Rightarrow T \text{ est auto adjoint}$$

0,5

II - إيجاد القيم الذاتية للمؤثر الخطي:

(3pts)

$$A : \ell^1(\mathbb{R}) \to \ell^1(\mathbb{R})$$

$$A(x_1, x_2, \dots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$$

نبحث عن قيم λ تحقق: $A(x_1, x_2, \dots) = \lambda (x_1, x_2, \dots)$ ، $(x_1, x_2, \dots) \neq (0, 0, \dots)$

1

أي أن:

$$\left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$$

0,5

بعبارة أخرى

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_1 \\ \frac{x_2}{2} = \lambda x_2 \\ \frac{x_3}{3} = \lambda x_3 \\ \vdots \end{cases}$$

0,5

أي أنه يكفي أن تقبل معادلة واحدة على الأقل من المعادلات حلا أي:

$$\lambda = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

1