RÉPUBLIQUE ALÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ D'OUM EL BOUAGHI

FACULTÉ DE SCIENCES EXACTES SCIENCES DE NATURE ET DE LA VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Notes de cours et exercices

Enseignant : Mohamed Saadi

Contact : saadimohamed34@gmail.com

Théorie variationnelle des équations elliptiques

Année universitaire 2023/2024

Table des matières

Introduction

Ce polycopié de cours destiné aux étudiants de deuxième année de Master en Mathématiques Appliquées. Dans ce cours, nous explorerons en profondeur les aspects fondamentaux des problèmes variationnels abstraits et des équations elliptiques du second ordre, qui constituent un domaine passionnant et essentiel des mathématiques appliquées. Le contenu de ce polycopié a été soigneusement structuré pour vous offrir une compréhension complète de ces concepts.

Au cours de notre voyage mathématique, nous aborderons des sujets variés, notamment les espaces de Hilbert, le théorème de Lax-Miligram, les espaces de Sobolev, l'analyse vectorielle, les problèmes aux limites elliptiques du second ordre, la régularité des solutions faibles, le principe de maximum, et bien plus encore. Chacun de ces chapitres constitue une pièce essentielle de la théorie variationnelle des équations elliptiques.

Nous vous encourageons à plonger dans ce polycopié avec un esprit curieux et une passion pour les mathématiques appliquées. La compréhension de ces concepts joue un rôle central dans de nombreuses applications pratiques, allant de la physique à l'ingénierie, en passant par l'informatique et bien d'autres domaines.

Nous espérons que ce cours vous apportera une base solide pour explorer des problèmes mathématiques complexes, ainsi que les outils nécessaires pour aborder des défis réels dans votre carrière professionnelle. Nous vous souhaitons une expérience d'apprentissage enrichissante et fructueuse au cours de votre étude de la théorie variationnelle des équations elliptiques.

Remerciement

Je remercie M. Hadjou Brahim (enseignant à l'Université Oum El Bouaghi) pour les nombreux avantages dont j'ai bénéficié grâce à nos discussions lors de mon enseignement de cette matière à l'Université Oum El Bouaghi. Je tiens également à souligner que certains des exercices inclus dans ce polycopié ont été inspirés de la série d'exercices que le professeur Hadjou a partagée sur la plate-forme Moodle lors de son enseignement de cette matière.

Chapitre 1

Problèmes variationnels abstraits

Le théorème de Riesz-Fréchet représente les éléments du dual d'un espace de Hilbert comme produit scalaire par un vecteur de l'espace, le théorème de Lax-Milgram est une généralisation du théorème de Riesz-Fréchet dans un sens que nous allons le connaitre à la fin de ce chapitre. On commence par un rappel sur les espaces de Hilbert avant de passser à l'énnoncé et la preuve du théorème de Lax-Miligram.

1.1 Rappel sur les espaces de Hilbert

Définition 1.1

Un produit scalaire sur un espace vectoriel E est une fonction (x, y) défine sur $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

— $\forall x, y, z \in E : (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

— $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

— $\forall x, y \in E : (x, y) = (y, x)$

— $\forall x \in E : (x, x) \geq 0$

— $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Les properiétés suivantes résultent de la définition précédante :

— $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : (x, \lambda y) = \lambda(x, y)$

— $\forall x, y, z \in E : (x, y + z) = (x, z) + (y, z)$

Définition 1.2

Un espace Euclidien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Tout espace Eulidien E est un espace normé, en effet si $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire défini sur E alors l'application $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ définit une norme sur E.

Proposition 1.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un espace Euclidien muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$. Alors : $\forall x, y \in E$: $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$.

Démonstration.

On a $0 \leq (tx, y) = t^2\|x\|^2 + 2t(x, t) + \|y\|^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, donc le discriminant de ce trinôme est négatif ou nul d'où $(x, y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ autremant dit $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$. ■

Définition 1.4

Soient E un espace Euclidien muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$, x, y deux vecteurs de E et F, G deux parties de E.

— *Si $(x, y) = 0$, on dit que les vecteurs x et y sont ortogonaux et on écrit $x \perp y$.*

— *L'orthogonal de F est $F^{\perp} = \{y \in E : (x,y) = 0, \forall x \in F\}$.*

— *Si les vecteurs de F et G sont deux à deux ortogonaux on dit que F et G sont orthogonaux et on éxrit $F \perp G$.*

La continuité du produit scalaire imlique que si x est orthogonal aux éléments d'une suite y_n qui converge vers y alors $x \perp y$.

Définition 1.5

Un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ est un espace Euclidien complet pour la distance $d(x,y) = \|x-y\|$.

Proposition 1.6

Soit M un sous espace fermé d'un Hilbert $\mathbb{H}$, alors

$$\mathbb{H} = M \oplus M^{\perp}$$

Corollaire 1.7

Si M est un sous espace d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$. Alors, M est dense dans H si et seulement si $M^{\perp} = \{0\}$.

Théorème 1.8 (de représentation de Risz-Fréchet)

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et $\mathbb{H}'$ sont dual. Alors pour tout $\varphi \in \mathbb{H}'$, il existe un et un seule $f \in \mathbb{H}$ tel que : $\langle \varphi, v\rangle = (f,v), \forall v \in \mathbb{H}$, de plus $\|f\|_{\mathbb{H}} = \|\varphi\|_{\mathbb{H}'}$.

1.2 Théorème de Lax-Miligram

Soit E un espace Euclidien (préhilbertien) réel.

Définition 1.9

Une forme bilinéaire sur E est une application $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que les applications partielles $x \mapsto a(x,y)$ et $y \mapsto a(x,y)$ sont linéaires sur E. Elle est

— *continue s'il existe une constante* $c > 0$ *telle que :* $|a(u,v)| \leq c\|u\|\|v\|, \forall u, v \in E$.

— *coersive s'il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $|a(u,u)| \geq \alpha\|u\|^2, \forall u \in E$.

— *symétrique si* $a(u,v) = a(v,u), \forall u, v \in E$.

Théorème 1.10 (de Lax-Miligram)

Soit V *un espace de Hilbert. Soit* $a(\cdot,\cdot)$ *une forme bilinéaire continue et coercive sur* V*. Soit* ℓ *une forme linéaire continue sur* V*. Alors il existe un unique* $u \in V$ *tel que* $a(u,v) = \ell(v), \forall v \in V$.

Démonstration.

On a $\ell \in V'$, d'après de téorème de Risz-Fréchet $\exists!\ T_\ell \in V$ tel que $\ell(v) = (T_\ell, v), \forall v \in V$.

L'application $v \mapsto a(u,v)$ est un élément de V', d'après le théorème de Risz-Fréchet, $\exists!\ T_a u \in V$ tel que $a(u,v) = (T_a u, v), \forall v \in V$.

T_a est un opérateur linéaire continu de V dans lui même, en effet

$$\begin{aligned}
(T_a(\alpha u + \beta w), v) &= a(\alpha u + \beta w, v) \\
&= \alpha a(u,v) + \beta a(w,v) \\
&= \alpha(T_a u, v) + \beta(T_a w, v) \\
&= (\alpha T_a u + \beta T_a w, v).
\end{aligned}$$

Le problème "trouver $u \in V$ tel que $a(u,v) = \ell(v), \forall v \in V$" devient "trouver $u \in V$ tel que $(T_a u, v) = (T_\ell, v), \forall v \in V$" c-à-dire $T_a u = T_\ell$. Donc, il suffit de montrer que T_a est bijective de V dans lui même.

T_a est injective, en effet $T_a u = 0 \Rightarrow (T_a u, u) = 0 \Rightarrow a(u,u) = 0$, comme $a(u,u) \geq$

$\alpha\|u\|^2$ alors $\|u\| = 0$, d'où $u = 0$.

Pour montrer que T_a est surjective il suffit de montrer que T_aV est fermé dans V et $\big(T_aV\big)^{\perp} = \{0\}$. Soit u_n une suite d'éléments de T_aV convergente vers $u \in V$, donc u_n est de Cauchy dans V, d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q > N : \|u_q - u_p\| \leq \alpha\varepsilon.$$

$u_n \in T_aV \Rightarrow \exists v_n \in V : u_n = T_av_n$.

$(T_av_q - T_av_q, v_q - v_p) = (T_a(v_q - v_p), v_q - v_p) = a(v_q - v_p, v_q - v_p) \geq \alpha\|v_q - v_p\|^2$, donc

$\|v_q - v_p\|^2 \leq (1/\alpha)(T_a(v_q - v_p), v_q - v_p) \leq \|T_a(v_q - v_p)\|\|v_q - v_p\|$ d'où

$\|v_q - v_p\| \leq (1/\alpha)\|T_av_q - T_av_p\| = (1/\alpha)\|u_q - u_p\| \leq \varepsilon$, donc v_n est une suite de Cauchy dans V, elle converge vers $v \in V$, la continuité de T_a imlique la convergence de T_av_n vers $T_av = u \in T_aV$. Donc T_aV est fermé dans V.

Montrons maintenant que $\big(T_aV\big)^{\perp} = \{0\}$.

$w \in \big(T_aV\big)^{\perp} \Rightarrow (w, z) = 0, \forall z \in T_aV \Rightarrow (w, T_aV) = 0, \forall vV \Rightarrow (w, T_aw) = 0 \Rightarrow a(w, w) = 0$, comme $|a(w, w) \geq \alpha\|w\|^2$, alors $\|w\| = 0$ d'où $w = 0$. ■

Théorème 1.11 (de Stampacchia)

Soit V un espace de Hilbert. Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire, continue, coercive et symétrique sur V. Soit ℓ une forme linéaire continue sur V. Alors, $u \in V$ est une solution du problème $a(u, v) = \ell(v), \forall v \in V$ si et seulement si u réalise le minimum de la fonctionnelle $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$.

Démonstration.

Soit $u \in V$ telle que $a(u,v) = \ell(v), \forall v \in V$, montrons que

$$J(u) \leq J(v), \forall v \in V.$$

On a $a(u-v,u-v) \geq 0$ donc $a(u,u) - 2a(u,v) + a(v,v) \geq 0$ ce qui implique

$$a(u,u) - 2\ell(v) + a(v,v) \geq 0.$$

D'autre part, $a(u,u) - 2\ell(u) = -\ell(u)$ (car $a(u,u,) = \ell(u)$), donc $a(u,u) = -2J(u)$, donc l'inégalité $a(u,u) - 2\ell(v) + a(v,v) \geq 0, \forall v \in V$ implique

$$-J(u) + J(v) \geq 0, \forall v \in V.$$

Supposons maintenant que $J(u) \leq J(v), \forall v \in V$ et montrons que $a(u,v) = \ell(v), \forall v \in V$.

On a $J(u) \leq J(v), \forall v \in V$ implique $J(u) \leq J(u+tv), \forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in V$, donc

$$a(u,u) - 2\ell(u) \leq a(u+tv,u+tv) - 2\ell(u+tv), \forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in V$$

d'où

$$2ta(u,v) + t^2 a(v,v) - 2t\ell(v) \geq 0, \forall v \in V.$$

Si $t > 0$ alors $2a(u,v) + ta(v,v) - 2\ell(v) \geq 0, \forall v \in V$, en fesant tendre t vers 0 nous obtenons $a(u,v) - \ell(v) \geq 0, \forall v \in V$.

Si $t < 0$ alors $2a(u,v) + ta(v,v) - 2\ell(v) \leq 0, \forall v \in V$, en fesant tendre t vers 0 nous obtenons $a(u,v) - \ell(v) \leq 0, \forall v \in V$, donc $a(u,v) = \ell(v), \forall v \in V$. ■

Remarque 1.12

Si On prend $a(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)$ (le produit scalaire de V) dans le théorème de Lax-Milgram nous obtenons le théorème de Risz-Fréchet.

Exercices du chapitre 1

V désigne un espace de Hilbert réel et V' son dual topologique.

Exercice 1.1

Soit a une forme bilineaire symetrique sur $V \times V$. On suppose que a est continue et coercive. Montrer que l'expression $a(u, v)$ definit un produit scalaire sur V et que la norme associée est equivalente a la norme de V. En deduire que dans ce cas le théorème de Lax-Milgram est un cas particulier du théorème de Riesz.

Solution.

$a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire, symétrique, continue est coercive donc :

— $\forall u, v, w \in V : a(u + v, w) = a(u, w) + a(v, w)$

— $\forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda u, v) = \lambda a(u, v)$

— $\forall u, v \in V : a(u, v) = a(v, u)$

— $\exists \alpha > 0 : \forall u \in V : a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \geq 0.$

Il reste à montrer que $a(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$. Soit $u \in V$ tel que $a(u, u) = 0$ donc $0 = a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V$ ce qui implique $\|u\|_V = 0$ d'où $u = 0$ (puisque $\| \cdot \|_V$ est une norme).

Montrons maintenant l'équivalance de la norme associée à $a(\cdot, \cdot)$ et $\| \cdot \|_V$. a est continue donc $\forall u \in V : a(u,u) \leq c\|u\|_V^2$, d'où $\sqrt{a(u,u)} \leq \sqrt{c}\|u\|_V$. D'autre part, $\sqrt{a(u,u)} \geq \alpha\|u\|_V^2$, d'où

$$\forall u \in V : \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\|v\|_V \leq \sqrt{a(u,u)} \leq \sqrt{c}\|u\|_V.$$

Dans le cas où a est une forme bilinéaire, continue, coercive et symétrique. $a(u,v)$ est un produit scalaire dans V. V est un espace de Hilbert pour la norme $\sqrt{a(\cdot,\cdot)}$, donc le Théorème de Lax-Miligrame dans ce cas n'est que le Théorème de Risz.

Exercice 1.2

Soit a une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ et $L : V \to V'$ une application linéaire continue. On suppose que a est α-coercive et que $\|L\|_{\mathcal{L}(V,V')} \leq \alpha$. Montrer que

$$\forall f \in V', \exists! u \in V : a(u,v) + \langle L(u), v\rangle = \langle f, v\rangle, \forall f \in V$$

de plus, on a l'estimation $\|u\|_V \leq \dfrac{1}{\alpha - \|L\|^2_{\mathcal{L}(V,V')}}\|v\|_{V'}$.

Solution.

On pose $b(u,v) = a(u,v) + \langle L(u), v\rangle = \langle f, v\rangle$. La bilinéarité de a et la linéarité de L entraînnent la bilinéarité de b.

Motrons que b est continue de V dans V, on a

$$|\langle L(u), v\rangle| \leq \|L(u)\|_{V'}\|v\|_V \leq \|L\|_{(V,V')}\|u\|_V\|v\|_V$$

donc

$$|\langle L(u), v\rangle| \leq \alpha\|u\|_V\|v\|_V,$$

et comme $|a(u,v)| \leq c\|u\|_V\|v\|_V$ on a $|b(u,v)| \leq (c+\alpha)\|u\|_V\|v\|_V$, d'où la continuité de b.

Montons que b est coercive, on a

$$|\langle L(u), v\rangle| \leq \|L\|_{\mathcal{L}(V,V')}\|u\|_V^2$$

donc $-\|L\|_{\mathcal{L}(V,V')}\|u\|_V^2 \leq |\langle L(u), u\rangle| \leq \|L\|_{\mathcal{L}(V,V')}\|u\|_V^2$ ce qui implique $b(u,u) \geq \alpha\|u\|_V^2 - \|L\|_{\mathcal{L}(V,V')}\|u\|_V^2 = \beta\|u\|_V^2$ (où $\beta = \alpha - \|L\|_{\mathcal{L}(V,V')}$) donc b est β-coercive.

Toutes les hypothèese de théorème de Lax-Miligram sont vérifiées donc

$$\forall f \in V', \exists! u \in V : b(u,v) = \langle f, v\rangle, \forall f \in V$$

En prennant $v = u$ on trouve

$$\frac{1}{\beta}\|u\|_V^2 \leq b(u,u) \leq \langle f, u\rangle \leq \|u\|_V\|f\|_{V'}$$

donc $\|u\|_V \leq \dfrac{1}{\alpha - \|L\|^2_{\mathcal{L}(V,V')}}\|v\|_{V'}$.

Exercice 1.3

Soient $a(.,.)$ et $b(.,.)$ deux formes bilineaires continues sur $V^2, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \ell \in V'$ et le problème

$$\begin{cases} Trouver \quad u \in V \quad tel \quad que \\ a(u,v) + \lambda b(u,v) = \langle \ell, v\rangle, \forall v \in V. \end{cases} \qquad (PV).$$

Montrer que chacune des hypothèses suivantes est suffisante pour que le problème (PV) admette une solution unique :

1. *$a(.,.)$ est coercive et $b(.,.)$ est positive,*
2. *$a(.,.)$ est positive et $b(.,.)$ est coercive,*
3. *$a(.,.)$ est coercive et λ est suffisamment petit (préciser),*
4. *$b(.,.)$ est coercive et λ est suffisamment grand (préciser).*

Solution.

En posant $c(u,v) = a(u,v) + \lambda b(u,v), \forall u, v \in V$, le probème (PV) devient

$$\begin{cases} Trouver \quad u \in V \quad tel \quad que \\ a(u,v) + \lambda b(u,v) = \langle \ell, v\rangle, \forall v \in V. \end{cases} \tag{1.1}$$

Nous appliquons le théorème de Lax-Milgram. On a ℓ est une forme linéaire continue sur V. Il reste à montrer que $c(.,.)$ est une forme bilinéaire continue sur V^2 et coercive sur V.

Comme $a(.,.)$ et $b(.,.)$ sont des formes biinéaires sur V^2, il facie à prouver que $c(.,.)$ est une forme bilinéaire sur V^2.

D'autre part, $a(.,.)$ et $b(.,.)$ sont deux forme bilinéaire continues sur V^2, alors ils existent deux constantes C_a et C_b telles que

$$|a(u,v)| \leq C_a \|u\|_V \|v\|_V, \forall u, v \in V, \tag{1.2}$$

$$|b(u,v)| \leq C_b \|u\|_V \|v\|_V, \forall u, v \in V, \tag{1.3}$$

alors, pour tous $u, v \in V$, on a

$$\begin{aligned} |c(u,v)| &= |a(u,v) + \lambda b(u,v)| \\ &\leq |a(u,v)| + \lambda |b(u,v)| \\ &\leq C_a \|u\|_V \|v\|_V + \lambda C_b \|u\|_V \|v\|_V \\ &= (C_a + \lambda C_b) C_b \|u\|_V \|v\|_V, \end{aligned}$$

donc il existe une constante $C_c = C_a + \lambda C_b$ telle que

$$|c(u,v)| \leq C_c \|u\|_V \|v\|_V, \forall u, v \in V,$$

d'où la continuité de $c(.,.)$ sur V^2.

Pour pouvoir conclure, il nous ne reste qu'à prouver que la forme bilinéaire $c(.,.)$ est coercive sur v.

1. Supposons que $a(.,.)$ est coercive et $b(.,.)$ est positive. Alors,

$$\exists \alpha_a > 0 : |a(u,u)| \geq \alpha_a \|u\|_V^2, \forall u \in V \tag{1.4}$$

et

$$b(u,u) \geq 0, \forall u \in V,$$

d'où, pour tout $u \in V$

$$\begin{aligned} c(u,u) &= a(u,u) + \lambda b(u,u) \\ &\geq \alpha_a \|u\|_V^2 + b(u,u) \\ &\geq \alpha_a \|u\|_V^2, \end{aligned}$$

alors, $c(.,.)$ est coercive sur V.

2. Supposons que $a(.,.)$ est coercive et $b(.,.)$ est positive. Alors,

$$a(u,u) \geq 0, \forall u \in V,$$

et

$$\exists \alpha_b > 0 : |b(u,u)| \geq \alpha_b \|u\|_V^2, \forall u \in V, \tag{1.5}$$

d'où, pour tout $u \in V$

$$\begin{aligned} c(u,u) &= a(u,u) + \lambda b(u,u) \\ &\geq a(u,u) + \lambda \alpha_b \|u\|_V^2 \\ &\geq \lambda \alpha_b \|u\|_V^2, \end{aligned}$$

alors, $c(.,.)$ est coercive sur V.

3. Supposons $a(.,.)$ est coercive. Alors, par l'inégalité $x \geq -|x|, \forall x \in \mathbb{R}$, la formule (1.4) et (1.3), on a

$$\begin{aligned} c(u,u) &= a(u,u) + \lambda b(u,u) \\ &\geq \alpha_a \|u\|_V^2 - \lambda |b(u,u)| \\ &\geq \alpha_a \|u\|_V^2 - \lambda C_b \|u\|_V^2 \\ &= (\alpha_a - \lambda C_b) \|u\|_V^2, \end{aligned}$$

donc $c(.,.)$ est coercive dès que $\lambda < \dfrac{\alpha_a}{C_b}$.

4. Supposons que $b(.,.)$ est coercive. Alors, par l'inégalité $x \geq -|x|, \forall x \in \mathbb{R}$, la formule (1.5) et (1.2), on a

$$\begin{aligned} c(u,u) &= a(u,u) + \lambda b(u,u) \\ &\geq -|a(u,u)| + \lambda \alpha_b \|u\|_V^2 \\ &\geq -C_a \|u\|_V^2 + \lambda \alpha_b \|u\|_V^2 \\ &= (-C_a + \lambda \alpha_b) \|u\|_V^2, \end{aligned}$$

donc $c(.,.)$ est coercive dès que $\lambda > \dfrac{C_a}{\alpha_b}$.

Chapitre 2

Rapels sur Les espaces de Sobolev et sur l'analyse vectorielle

Dans la suite, Ω désigne $\mathbb{R}^n$ ou un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ.

2.1 Espaces de Sobolev H^1, H_0^1 et H^{-1}

Définition 2.1

L'espace $H^1(\Omega)$(de Sobolev d'ordre 1) est l'ensemble de fonctions de $L^2(\Omega)$ ayant des dérivées (prises au sens des distrinutions) dans $L^2(\Omega)$.

$$H^1(\Omega) = \left\{ u : u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1...n \right\}.$$

On peut vérifier que l'application

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx$$

définit un produit scalaire sur $H^1(\Omega)$, donc $H^1(\Omega)$ est un espace normé dont la norme est

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\Big|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Exemple 2.2

1. *Soit* $]a,b[$ *un intervalle borné de* $\mathbb{R}$. *Si* u *est une fonction continue sur* $[a,b]$ *à dérrivée continue par morceaux sur* $[a,b]$ *alors* $u \in H^1(]a,b[)$.
2. *Soit* u *la fonction définie su r* $]-1,1[$ *par :* $u(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0, \end{cases}$ *alors* $u \notin H^1(]-1,1[)$ *car* $u' = \delta_0 \notin L^2(-1,1)$.

Définition 2.3 (Convergence dans $H^1(\Omega)$)

Une suite u_j *converge vers* u *dans* $H^1(\Omega)$ *si et seulement si* $u_j \to u$ *dans* $L^2(\Omega)$ *et* $\nabla u_j \to \nabla u$ *dans* $(L^2(\Omega))^n$.

Proposition 2.4

L'espace $\Big(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}\Big)$ *est un espace de Hilbert séparable.*

Démonstration.

Soit u_j une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p,q > N : \|u_q - u_p\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Donc les suites u_j et $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}, j = 1, 2, ..n$ sont de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ donc $u_j \longrightarrow u$ et $\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \longrightarrow v_i$ dans $L^2(\Omega)$.

L'injection $L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ assure la convergence de u_j et $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ vers u et v_i respectivement dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

L'opérateur de dérvation est continu dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, donc

$$\lim_j \langle \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\lim_j \langle u_j, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = -\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \longrightarrow v_i \in L^2(\Omega)$, donc $H^1(\Omega)$ est un Hilbert. Avant da passeer à la preuve de la séparabilité de $H^1(\Omega)$, rappelons les propriété suivante :

— Le produit de deux espaces séparables et un espace séparable.

— Tout sous-espace fermé d'un espace de Hilbert séparable et un sous-espace séparable.

L'application $J(u) = (u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial \varphi}{\partial x_n})$ est une isométrie de $H^1(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))^{n+1}$, donc on peut identifier $H^1(\Omega)$ à $J(H^1(\Omega))$ qui est un sous espace fermé de l'espace de Hilbert $(L^2(\Omega))^{n+1}$, d'où la séparabilité de $H^1(\Omega)$. ■

Proposition 2.5

Si Ω est borné alors $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$.

Démonstration.

Il suffit de montrer que $(\mathcal{D}(\Omega))^{\perp} \neq \{0\}$.

$$\begin{aligned} u \in (\mathcal{D}(\Omega))^{\perp} &\Rightarrow \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = 0, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} u(x)v(x)dx - \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)v(x)dx = 0, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &\Rightarrow \langle -\Delta u + u, v\rangle = 0, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &\Rightarrow -\Delta u + u = 0. \end{aligned}$$

Si Ω est borné, il existe $u_0 \in H^1(\Omega)$ solution de $-\Delta u + u = 0$ avec $u_0 \neq 0$, donc $(\mathcal{D}(\Omega))^{\perp} \neq \{0\}$. ■

Proposition 2.6

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration.

La démonstration se fait en deux étapes : Troncature et régularisation.

Troncature : On note $H^1_c(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^n)$ à support compact, on montre que $H^1_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. En effet, soit $M \in \mathcal{D}(\Omega)$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} M(x) = 1, |x| < 1, \\ M(x) = 0, |x| > 2 \\ 0 \leq M(x) \leq 1, 1 \leq |x| \leq 2. \end{cases}$$

On note $M_r(x) = M(x/r)$, où $x/r = (x_1/r, x_2/r, ..., x_n/r)$. Alors on peut montrer que pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ les élément de la suite $M_r v$ sont dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ et $M_r v$

converge vers v dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ quand $r \to \infty$. Donc tout élément $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ peut approximer par une suite d'élément $M_r v$ de $H^1_c(\mathbb{R}^n)$, d'où la densité de $H^1_c(\mathbb{R}^n)$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Régularisarion : On montre que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1_c(\mathbb{R}^n)$. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\begin{cases} \rho(x) \geq 0, |x| < 1, \\ M(x) = 0, |x| \geq 1 \\ \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) = 1. \end{cases}$$

On pose $\rho_h(x) = (1/h^n)\rho(x/h)$, alors on peut montrer que $v_h = \rho_h * v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $v_h \to v$ quand $h \to 0$ pour la topologie de $H^1(\mathbb{R}^n)$. ∎

Définition 2.7

L'espace $H^1_0(\Omega)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Proposition 2.8

- $H^1_0(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.
- *Si $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n)$ alors il existe une suite u_j d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers u pour la topologie de $H^1(\Omega)$.*
- $\left(H^1_0(\Omega), \|\cdot\|_{|H^1(\Omega)}\right)$ *est un espace de Hilbert séparable.*
- *Si $u \in H^1_0(\Omega)$ alors le prolongement par de u par 0 en dehors de Ω est un élément de $H^1(\mathbb{R}^n)$.*

Proposition 2.9 (inégalité de Poincaré)

Si Ω est borné (au moin dans une direction) alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n} \Big\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \Big\|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{1/2}, \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

Démonstration.

Sans pert de généralité on peut supposer que Ω est contenu dans la bande $a \leq x_n \leq b$, on pose $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $a \leq x_n \leq b$.

Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ est $\widetilde{v}$ sa prolongement par 0 en dehors de Ω.

On a $\widetilde{v}(x', x_n) = \displaystyle\int_a^{x_n} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t}(x', t) dt$ donc

$$\begin{aligned} |\widetilde{v}(x', x_n)|^2 &\leq \int_a^{x_n} \Big| \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t}(x', t) \Big|^2 dt \\ &\leq \int_a^{x_n} 1 dt \int_a^{x_n} \Big| \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t}(x', t) \Big|^2 dt \\ &= (x_n - a) \int_a^{x_n} \Big| \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t}(x', t) \Big|^2 dt \\ &\leq (x_n - a) \int_{\mathbb{R}} \Big| \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t}(x', t) \Big|^2 dt \end{aligned}$$

ce qui ipmlique

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widetilde{v}(x', x_n)|^2 dx' \leq (x_n - a) \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t}(x', t) \Big|^2 dx$$

d'où

$$\int_a^b \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widetilde{v}(x', x_n)|^2 dx' dx_n \leq \int_a^b (x_n - a) dx_n \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t}(x', t) \Big|^2 dx$$

donc

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{(b-a)^2}{2} \Big\| \frac{\partial v}{\partial x_n} \Big\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ on trouve le résultat pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. ■

Corollaire 2.10

Si Ω est borné (au moin dans une direction) alors la semi-norme $\left(\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial \cdot}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalante à celle induite par $H^1(\Omega)$.

On note $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial \cdot}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}$.

Démonstration.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, comme $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}$ alors $\left(\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2} = 0 \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0 \Rightarrow u = 0$.

En utilisant l'inégalité de Poincaré on montre que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1+C_\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

■

Définition 2.11

On désigne par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 2.12

- $\|g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\langle g, v\rangle : u \in H_0^1(\Omega) \wedge |u\|_{H_0^1(\Omega)} = 1\}$.

- $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ *avec injections continues est denses.*
- $g \in L^2(\Omega) \Rightarrow \Big(g \in H^{-1}(\Omega)$ *et* $\langle g, v\rangle = \displaystyle\int_\Omega g(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)\Big)$.
- $g \in L^2(\Omega) \Rightarrow \Big(\dfrac{\partial g}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$ *et* $\langle \dfrac{\partial g}{\partial x_i}, v\rangle = -\displaystyle\int_\Omega g(x)\dfrac{\partial v}{\partial x_i}dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)\Big), \forall 1 \leq i \leq n$.
- $g \in (L^2(\Omega))^n \Rightarrow \Big(div(g) \in H^{-1}(\Omega)$ *et* $\langle div(g), v\rangle = -\displaystyle\int_\Omega f \cdot \nabla v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)\Big)$.

2.2 Traces de fonctions de $H^1(\Omega)$

On note $\mathbb{R}^n_+ = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, $\Gamma = \{(x', 0) : x' \in \mathbb{R}n - 1 : x_n > 0\}$ (la forontiére de $\mathbb{R}^n_+$) et $\overline{\mathbb{R}^n_+} = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$.

Proposition 2.13

$\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *est dense dans* $H^1(\mathbb{R}^n_+)$.

Démonstration.

Même preuve de la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. ■

Proposition 2.14

Pour tout $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *on a* $\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$.

Démonstration.

On a $u^2(x',0) = -\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x_n} u^2(x',x_n)dx_n = -2\int_0^\infty u(x',x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}u(x',x_n)dx_n$,

donc

$$u^2(x',0) \leq 2\Big(\int_0^\infty |u|^2 dx_n\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty |\frac{\partial u}{\partial x_n}|dx_n^2\Big)^{1/2} \leq \int_0^\infty |u|^2 dx_n + \int_0^\infty |\frac{\partial u}{\partial x_n}|^2 dx_n,$$

une intégration de deux membres sur $\mathbb{R}^{n-1}$ nous donne $\|u(\cdot,0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$.

■

Corollaire 2.15

L'application

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \to L_2(\mathbb{R}^{n-1})$$

$$u \mapsto \gamma_0(u) = u(x',0)$$

se prolonge par continuité à une application continue de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ *dans* $L_2(\Gamma)$.

On peut définir $u_{|\Gamma}$ (la valeur de $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ sur Γ) en tant que fonction de $L_2(\Gamma)$.

2.3 Espaces de Sobolev dans un ouvert réguliers

Soient

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n : |x'| < 1; |x_n| < 1\},$$

$$Q_+ := \{(x',x_n) \in \mathbb{R}^n : |x'| < 1; 0 < x_n < 1\}$$

et

$$Q_0 := \{(x',0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} : |x'| < 1\}.$$

On dit que l'ouvert Ω est $k-$régulier si pour tout $x \in \Gamma$, il existe un couple (U, φ), où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x et $\varphi \in C^k(U)$ un difféomorphisme de U dans Q tel que :

$$\varphi^{-1} \in C^k(\overline{Q}), \quad \varphi(U \cap \Gamma) = Q_0 \quad et \quad \varphi(U \cap \Omega) = Q_+.$$

Si Ω est $k-$régulier, alors Γ admet une paramétrisation par une fonction de classe C^k.

Ω est dit Lipschitzien si Γ admet une paramétrisation par une fonction Lipschitzienne.

On note $\nu(x)$ le vecteur unitaire normal extérieur au point $x \in \Gamma$. Si u est une fonction assez régulière définie sur $\overline{\Omega}$, alors la dérivée normale de u sur Γ est $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u.\nu$.

Théorème 2.16

Si Ω est $1-$régulier alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Corollaire 2.17

Si Ω est $1-$régulier alors l'application

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to L_2(\Gamma)$$
$$u \mapsto \gamma_0(u) = u_{|\Gamma}$$

se prolonge par continuité à une application continue de $H^1(\Omega)$ dans $L_2(\Gamma)$.

$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$ n'est pas surjective, on note $H^{1/2}(\Gamma) = \gamma_0(H^1(\Omega))$.

Théorème 2.18

Si Γ *est assez régulière alors* $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0(u) = 0\}$.

Théorème 2.19 (de Rellich-Kondrachov)

Si Ω *est borné et 1-régulier alors l'injection de* $H^1(\Omega)$ *dans* $L_2(\Omega)$ *est compacte, autrment dit de toute suite bornée dans* $H^1(\Omega)$ *on peut extraire une sous-suite converge dans* $L_2(\Omega)$.

2.4 Formules de Green

Théorème 2.20

Soit D *un ouvert* $1-$*régulier. Soit* w *une fonction apparenant à* $C^1(\overline{D})$ *à support borné dans* $\overline{D}$. *Alors* w *vérifie la formule de Green*

$$\int_D \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)dx = \int_{\partial D} w(x)\nu_i(x)ds$$

où ν_i *est la i-ème composante de la normale extérieure unité de* D.

En prennant $w = uv$ dans la formule de Green (où u et v sont deux fonctions apparenant à $C^1(\overline{D})$ à supports bornés dans $\overline{D}$) nous obtnons la formule de d'intégration par partie

$$\int_D u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_D v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial D} u(x)v(x)\nu_i(x)ds.$$

Cette formule nous conduite a la formule suivante

$$\int_D \Delta u(x)v(x)dx = -\int_D \nabla u.\nabla v(x)dx + \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)v(x)ds,$$

pour toutes $u \in C^2(\overline{D})$ et $v \in C^1(\overline{D})$ à supports bornés dans $\overline{D}$, où $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.\nu$.

Théorème 2.21

Soit Ω un ouvert $1-$régulier. Alors pour toute $u, v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_\Gamma u(x)v(x)\nu_i(x)ds.$$

Démonstration.

On pose $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx, b(u,v) = \int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx$ et $d = \displaystyle\int_\Gamma u(x)v(x)\nu_i(x)ds$, alors a, b et d sont des formes bilinéaires continues sur $H^1(\Omega)$. En effet, $|a(u,v)| \leq \|u\|_{L_2(\Omega)}\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$, de même $|b(u,v)| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$.

La continuité de γ_0 de $H^1(\Omega)$ dans $L_2(\Gamma)$ implique la continuité de d car

$$|d(u,v)| \leq \|u\|_{L_2(\Gamma)}\|v\|_{L_2(\Gamma)} \leq c\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ donc ils existent deux suites u_j et v_j qui convergent vers u et v respectivement dans $H^1(\Omega)$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, u_j et v_j vérifient la formule de Green $a(u_j, v_j) = -b(u_j, v_j) + d(u_j, v_j)$, par passage à la limite, nous obtenons $a(u,v) = -b(u,v) + d(u,v)$. ■

2.5 Espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$

Définition 2.22

Pour tout entier $m \geq 1$, On definit l'espace de Sobolev d'ordre m par :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

On munit $H^m(\Omega)$ par le produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx$$

et on note $\| \cdot \|_{H^m(\Omega)}$ la norme correspondante.

Proposition 2.23

- *Muni de la norme $\| \cdot \|_{H^m(\Omega)}$, $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.*
- *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^n)$.*
- *Le prolongement par 0 d'une fonction de $H_0^m(\Omega)$ est dans $H^m(\mathbb{R}^n)$(H_0^m est la fermeture de $\mathcal{D}$ dans H^m).*
- *$\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^n_+)$.*
- *Si Ω est m-régulier alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.*
- *$g \in H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))' \Leftrightarrow g = \sum_{|j| \leq m} f_j, f_j \in L_2(\Omega)$.*
- *Si Ω est borné (au moin dans une direction) alors pour toute $u \in H_0^m(\Omega)$ il existe $c = c(\Omega)$ telle que*

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq c(\Omega) \Big(\sum_{|\alpha| = m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} \Big)^{1/2}.$$

- *Si* Ω *est assez régulier alors l'application*

$$\begin{aligned} \gamma : H^m(\Omega) &\to (L_2(\Gamma))^m \\ u &\mapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, ..., \gamma_{m-1} u), \quad \gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \nu_j} \end{aligned}$$

se prolonge par continuité à une application continue de $H^m(\Omega)$ *dans* $(L_2(\Gamma))^m$.

- *Si* Ω *est assez réguklier alors* $H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) : \gamma u = 0\}$.
- *(Formule de Green) Si* Ω *est* 1*-régulier alors,* $\forall (u, v) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ *on a*

$$\int_\Omega (\Delta u(x)) v(x) dx = -\int_\Omega \nabla u(x) . \nabla v(x) dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) ds.$$

Exercices du chapitre 2

Exercice 2.1

Soient Ω *un ouvert régulier et* Ω_1, Ω_2 *deux sous-ouverts réguliers de* Ω *tels que :*

$$\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega} \quad et \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi.$$

Soient $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ *et* $u_2 \in H^1(\Omega_2)$ *telles que* $u_1 = u_2$ *sur* I*, où* $I = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$.

On pose $u = \begin{cases} u_1 & sur\ \Omega_1 \\ u_2 & sur\ \Omega_2 \end{cases}$.

1. *Montrer que* $u \in L_2(\Omega)$.

2. *Soit* $v \in \mathcal{D}(\Omega)$*. Montrer que :*

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, v \right\rangle = -\int_{\Omega_1} u_1 \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega_2} u_2 \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, i = 1, 2.., n.$$

3. *En appliquant la formule de Green, montrer que*

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, v \right\rangle = \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} v dx - \int_I u_1 v n^{(1)} d\sigma - \int_I u_2 v n^{(2)} d\sigma, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

   $n^{(k)}$ *désigne le vecteur unitaire normal sortant le long de* Ω_k*,* $k = 1, 2$.

4. *En déduire que* $u \in H^1(\Omega)$.

Solution.

1. On a $\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^2dx = \int_{\Omega_1} |u_1(x)|^2dx + \int_{\Omega_2} |u_2(x)|^2dx < \infty$ donc $u \in L_2(\Omega)$.
2. $\displaystyle\Big\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, v\Big\rangle = -\Big\langle u, \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big\rangle = -\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_{\Omega_1} u_1\frac{\partial v}{\partial x_i}dx - \int_{\Omega_2} u_2\frac{\partial v}{\partial x_i}dx.$
3. On a : $\displaystyle -\int_{\Omega_1} u_1\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_{\partial\Omega_1} u_1vn^{(1)}d\sigma + \int_{\Omega_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}vdx$. Comme $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a : $v = 0$ sur $\partial\Omega_1\backslash I$ donc $\displaystyle -\int_{\Omega_1} u_1\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_I u_1vn^{(1)}d\sigma + \int_{\Omega_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}vdx.$ On traite de la même façons : $\displaystyle -\int_{\Omega_1} u_1\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$ pour obtenir (d'après la question 2.).

$$\Big\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, v\Big\rangle = \int_{\Omega_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}vdx + \int_{\Omega_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}vdx - \int_I u_1vn^{(1)}d\sigma - \int_I u_2vn^{(2)}d\sigma.$$

4. On a $n^{(1)} = -n^{(2)}$ et $u_1 = u_2$ sur I donc $\displaystyle\Big\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, v\Big\rangle = \int_{\Omega_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}vdx + \int_{\Omega_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}vdx$ d'où $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$ sur $\Omega_k (k = 1, 2)$ donc $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$. Comme $u \in L_2(\Omega)$, alors $u \in H^1(\Omega)$.

Chapitre 3

Problèmes aux limites elliptiques du second ordre

Considérons l'équation

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)u \quad = \quad f(x), x \in \Omega. \qquad (3.1)$$

où $a_{i,j}, b_i, , (i, j = 1, 2..., n), a_0$ et f sont des fonction réel définies sur Ω.

On suppose que la matrice $A = (a_{i,j}(x))_{i,j}$ est symétrique. Soit $x_0 \in \Omega$, l'équation (3.1) est dite de type elliptique ou elliptique au point x_0 si toutes les valeurs prorpres de $A(x_0)$ sont strictement positives (ou strictement négatives), elle est elliptique sur Ω si elle est elliptique sur tout point de Ω.

On parle du problème au limite si on a

1. Une équation aux dirrivées partielles sur un ouvert Ω (par exemple (3.1)).

2. Un certain nombre de conditions sur le bord de Ω.

On dit que u est solution du problème au limite si elle vérifie l'équation sur Ω ainsi les conditions aux bord.

Problème de Dirichlet : La condition au bord est de la forme $u = g$ sur $\partial\Omega$ où g est une fonction définie sur $\partial\Omega$. Si $g = 0$ le problème est dit homogène sion il est nonhomogène.

Problème de Neumann : La condition au bord est de la forme $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g$ sur $\partial\Omega$ où g est une fonction définie sur $\partial\Omega$.

Problème mêlé : Les conditions au bord sont de la forme $u = g_1$ sur Γ_1 et $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g_2$ sur Γ_2 où $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, g_1 est une fonction définie sur Γ_1 et g_2 est une fonction définie sur Γ_2.

3.1 Formulation variationnelle et notion de solution faible

Soit le problème

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad sur \quad \Omega \\ u &= 0 \quad sur \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.2}$$

où Ω est un ouvert régulier et $f \in C(\overline{\Omega})$.

Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifiant (3.2) alors u est dite solution classique du problème (P). Dans la plupart des cas, la recherche de solutions classiques pose de nombreux difficultés, pour cela on cherche un autre type de solution en uutilisant l'approche variationnelle, L'idée principale de cette dernière est de transformer un problèle au limite à un autre problème en multipliant l'équation aux dérivées partielles par une fonction appartenant à un espace fonctionnel dit espace des fonctions tests et en intégrant par partie (formule de Green).

On pose

$$V = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) : v = 0 \quad sur \quad \partial\Omega\}.$$

Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solution de (3.2). Multiplions l'équation $-\Delta u = f$ par $v \in V$ et intégrons sur Ω nous obtenons

$$-\int_\Omega \Delta uvdx = \int_\Omega fvdx, \forall v \in V$$

par application de formule de Green sur le membre gauche de l'égalité précédente il vient :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla vdx = \int_\Omega fvdx, \quad \forall v \in V. \tag{3.3}$$

L'igalité (3.3) est appelée formulation variationnelle du problème (3.2).

Définition 3.1 (Solution faible)

Une solution $u \in V$ de formulation variationnelle (3.3) *est appellée solution faible du problème* (3.2).

Ecrivons (3.3) sous la forme $a(u, v) = \ell(v), \forall v \in V$, où $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla vdx$ et $\ell(v) = \int_\Omega fvdx$.

L'espace V n'est pas Hilbert, donc on cherche un espace autre que V pour étudier le problème (3.3) en appliquant le théorème de Lax-Milgram à savoir les espaces de Sobolev.

3.2 Etude de quelques cas : problèmes de Dirichlet, problèmes de Neumann, problèmes mêlé

Dans ce paragraphe nous allons traité quelques problèmes aux limite par l'approche variationnelle .

3.2.1 Exemples sur des problèmes de Dirichlet

Exemple 3.2

Soit $]a,b[$ *un intervalle borné et* $f \in L^2(]a,b[)$. *On considère le problème*

$$-u'' = f \quad sur \quad]a,b[\tag{3.4}$$

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{3.5}$$

On suppose que $u \in H^2(]a,b[)$ solution de (3.4)-(3.5). On multiplie l'équation (3.4) par $v \in H_0^1(]a,b[)$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$-\int_a^b u''(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1(]a,b[)$$

après intégration par partie, on obtient

$$-[u'(x)v(x)]_a^b + \int_a^b u'(x)v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1([]a,b[)$$

Comme $v \in H_0^1(]a,b[)$, alors $v(a) = v(b) = 0$, donc une formulation variatioonnelle du proplème (3.4)(3.5) est : trouver $u \in H_0^1(]a,b[)$ vérifiant

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1([]a,b[). \tag{3.6}$$

On a $\displaystyle\int_a^b u'(x)v'(x)dx \leq \|u'\|_{L_2(]a,b[)}\|v'\|_{L_2(]a,b)} = \|u'\|_{H_0^1(]a,b[)}\|v'\|_{H_0^1(]a,b[)}$,
donc $\displaystyle\int_a^b u'(x)v'(x)dx$ définie une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. De même, l' inégalité de C.S. implique que $\displaystyle\int_a^b f(x)v(x)dx$ définit une forme linéaire continue sur $H_0^1(]a,b[)$. D'autre part, la forme bilinéaire est 1-coercive car $\displaystyle\int_a^b (u'(x))^2dx = \|u\|^2_{H_0^1(]a,b[)}$.

D'après le théorème de Lax-Miligram il existe un et un seule $u \in H_0^1(]a,b[)$ solution de (3.6).

Exemple 3.3 (Un problème de Dirichlet homogène)

On considère le problème

$$-\Delta u + u = f \quad sur \quad \Omega \tag{3.7}$$

$$u = 0 \quad sur \quad \Gamma \tag{3.8}$$

où Ω *est un ouvert* 1*-régulier et* $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Soit $u \in H^1(\Omega)$ alors $-\Delta u + u \in H^{-1}(\Omega)$ et l'égalité (3.7) s'écrit

$$\langle -\Delta u, v\rangle + \langle u, v\rangle = \langle f, v\rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'après la proposition 2.12, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega uvdx \quad et \langle -\Delta u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla vdx.$$

Une formuation variationnelle du problème (3.7)–(3.8) est

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \bigtriangledown v(x) dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) dx = \langle f, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.9}$$

On pose $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \bigtriangledown v(x) dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) dx$ et $\ell(v) = \langle f, v \rangle$.

On vérifie facilment que a et ℓ satisfient les hypothèses du théorème de Lax-Miligram pour l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, d'où l'existante d'une solution fable du problème (3.7)-(3.8) appartenant à $H_0^1(\Omega)$.

Exemple 3.4 (Un problème de Dirichlet non homogène)

On considère le problème

$$-\Delta u + u = f \quad sur \quad \Omega \tag{3.10}$$

$$u = g \quad sur \quad \Gamma \tag{3.11}$$

où Ω *est un ouvert* 1*-régulier,* $f \in H^{-1}(\Omega)$ *et* $g \in H^{1/2}(\Omega)$.

$g \in H^{1/2}(\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega))$ *donc il existe* $h \in H^1(\Omega)$ *tel que* $g = \gamma_0 h$.

On pose $w = u - h$ donc w vérifie le problème

$$-\Delta w + w = f - \Delta h + h \quad sur \quad \Omega \tag{3.12}$$

$$w = 0 \quad sur \quad \Gamma \tag{3.13}$$

On vérifie que $f - \Delta h + h \in H^{-1}(\Omega)$, donc le problème (3.12)-(3.13) admet une solution faible unique $w_0 \in H_0^1(\Omega)$(voir exemple 3.3).

Ce qui implique que $u_0 = w_0 + h \in H^1(\Omega)$ est l'unique solution faible du problème (3.10)-(3.11).

3.2.2 Exemples sur des problèmes de Neumann

Exemple 3.5

Soit $]a,b[$ *un intervalle borné et* $f \in L^2(]a,b[)$. *On considère le problème*

$$-u'' + u = f \quad sur \quad]a,b[\tag{3.14}$$

$$u'(a) = u'(b) = 0 \tag{3.15}$$

Soit $u \in H^2(\Omega)$ solution de (3.14)–(3.15). On multiplie l'équation (3.14) par $v \in H^1(]a,b[)$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$-\int_a^b u''(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1(]a,b[)$$

après intégration par partie, on obtient

$$-[u'(x)v(x)]_a^b + \int_a^b u'(x)v'(x)dx \int_a^b u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, \forall v \in H^1([]a,b[)$$

Comme $u'(a) = u'(b) = 0$ alors une formulation variatioonnelle du proplème (3.14)–(3.15) est

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, \forall v \in H^1(]a,b[) \tag{3.16}$$

On montre à l'aide du théorème de Lax-Milgram que le problème (3.14)-(3.15) admet une solution faible unique.

Exemple 3.6 (Un problème de Neumann homogène)

On considère le problème

$$-\Delta u + u = f \quad sur \quad \Omega \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad sur \quad \Gamma \tag{3.18}$$

où Ω *est un ouvert* 1*-régulier et* $f \in L_2(\Omega)$.

Supposons $u \in H^2(\Omega)$ solution de (3.17)–(3.18). On multiplie (3.17) par $v \in H^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω on obtient

$$-\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx + \int_\Omega u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx,$$

En utilisant la formule de Green, il vient que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)v(x)ds + \int_\Omega u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \forall \in H^1(\Omega)$$

En tenant compte de la condition (3.18) on obtient la formuation variationnelle suivante :

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + \int_\Omega u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \forall v \in H^1(\Omega \quad (3.19)$$

On vérifie facilement que la formulation variationnelles (3.19) admet une solution unique $\widetilde{u} \in H^1(\Omega)$, donc le problème (3.17)-(3.18) admet une solution faible unique $\widetilde{u} \in H^1(\Omega)$.

Exemple 3.7 (Un problème de Neumann non homogène)

On considère le problème

$$-\Delta u + u = f \quad sur \quad \Omega \qquad (3.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad sur \quad \Gamma \qquad (3.21)$$

où Ω est un ouvert 1-régulier, $f \in L_2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\Gamma)$.

On multipie (3.20) $v \in H^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω on obtient

$$-\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx + \int_\Omega u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx,$$

Par la formule de Green et la condition (3.21), on obtient la formuation variationnelle suivante :

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_\Omega u(x)v(x)dx \quad = \quad \int_\Omega f(x)v(x)dx + \int_\Gamma g(x)v(x)ds, \forall \in H^1(\Omega) \tag{3.22}$$

Il est clair que $(u,v)\mapsto \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx$ est une forme bilinéaire, continue et coercive sur $H^1(\Omega)$ et $v\mapsto \displaystyle\int_\Omega f(x)v(x)dx$ est une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega)$ Pour appliquer le théorème de Lax-Miligram au problème (3.22) il faut montrer que $\Psi(v)=\displaystyle\int_\Gamma g(x)v(x)ds$ est une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega)$.
Il existe $h\in H^1(\Omega)$ tel que $g=\gamma_0 h$, γ_0 est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L_2(\Gamma)$ donc on a $|\Psi(v)|\leq \|\gamma_0 h\|_{L_2(\Gamma)}\|\gamma_0 v\|_{L_2(\Gamma)}\leq C\|h\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$, d'où la continuité de Ψ.

Remarque 3.8

La condition de Dirichlet est dite essentielle (ou explicite) car elle est forcée par l'appartenance à un espace, tandis que la condition de Neumann est dite naturelle (ou implicite) car elle découle de l'intégration par parties qui conduit à la formulation variationnelle.

3.2.3 Exemples sur des problèmes mêlés

Exemple 3.9

Soient $\Omega =]0,1[$ *un intervalle borné. On considère le problème aux limites suivants :*

$$-u'' + u = f \quad sur \quad \Omega, \tag{3.23}$$

$$u'(0) - u(0) = g_0 \tag{3.24}$$

$$u'(1) + u(1) = g_1 \tag{3.25}$$

où $f \in L_2(\Omega)$ *et* g_0, g_1 *sont des constantes réels.*

Une formulation variationnelle du problème (3.23)-(3.25) est :

$$\underbrace{\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx + u(1)v(1) + u(0)v(0)}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 u(x)f(x)dx + g_1 v(1) - g_0 v(0)}_{\ell(v)}, \tag{3.26}$$

pour tout $v \in H^1(\Omega)$.

On considère les aplications

$$\eta_0 : \; C^1([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad \eta_1 : \; C^1(]0,1[) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto \eta_0 u = u(0) \qquad\qquad u \longmapsto \eta_1 u = u(1)$$

Pour tout $x \in [0,1]$, on a $u(0) = u(x) - \int_0^x u'(t)dt$ donc

$$|u(0)| \leq |u(x)| + \int_0^x |u'(t)|dt \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |u'(x)| = \|u\|_{C^1([0,1])}.$$

Donc η_0 est continue de $C^1([0,1])$ dans $\mathbb{R}$, elle se prolonge à une application continue de $H^1(]0,1[)$ dans $\mathbb{R}$ notée enchore η_0, même chose pour η_1. Par l'inégalité de C.S et la continuité des opérateurs η_0 et η_1 de $H^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, on montre que $a(u,v)$

est bilinéaire continue sur $H^1(\Omega)$ et ℓ est continue sur $H^1(\Omega)$. D'après le théorème de Lax-Miligram le problème (3.26) admet une solution unique $\widetilde{u} \in H^1(\Omega)$.

Exemple 3.10 (Condition aux limites de Fourier (ou Robin))

On considère le problème

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad sur \quad \Omega && (3.27) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u &= g \quad sur \quad \Gamma && (3.28) \end{aligned}$$

où Ω *est un ouvert* 1*-régulier,* $\alpha > 0$, $f \in L_2(\Omega)$ *et* $g \in H^{1/2}(\Gamma)$.

On multipie (3.27) $v \in H^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω on obtient d'après la formule de Green et la condition (3.28)

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_\Omega u(x)v(x)dx + \alpha \int_\Gamma u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx + \int_\Gamma g(x)v(x)ds, \forall v \in$$

On pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_\Omega u(x)v(x)dx + \alpha \int_\Gamma u(x)v(x)ds$$

et

$$\ell(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx + \int_\Gamma g(x)v(x)ds.$$

On a

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \alpha\|\gamma_0 u\|_{L_2(\Gamma)}\|\gamma_0 v\|_{L_2(\Gamma)} \\ &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \alpha c\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &= (1+\alpha c)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

et

$$a(u,u) = \|u\|_{H^1(\Omega)} + \alpha\|u\|_{L_2(\Gamma)} \geq \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}|\ell(v)| &\leq \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(\Gamma)}\|\gamma_0 v\|_{L_2(\Gamma)} \\ &\leq c\|v\|_{H^1(\Omega)} + c_1\|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &= (c+c_1)\|v\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'après le théorème de Lax-Miligram, le problème (3.29) admet une solution unique $\widetilde{w} \in H^1(\Omega)$.

Exemple 3.11

On considère le problème

$$-\Delta u + u = f \quad sur \quad \Omega \tag{3.30}$$

$$u = 0 \quad sur \quad \Gamma_0 \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad sur \quad \Gamma_1 \tag{3.32}$$

où Ω *est un ouvert* 1*-régulier,* $f \in L_2(\Omega), \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ *et* $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ *telles que les mesures superficielles de* Γ_0 *et* Γ_1 *sont non nules .*

On multiplie (3.30) par $v \in V = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi = 0 \quad sur \quad \Gamma_0\}$ et on intègre sur Ω on obtient d'après la formule de Green et les conditions (3.31)-(3.32)

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_\Omega u(x)v(x)dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f(x)v(x)dx}_{\ell(v)}, \forall v \in V. \tag{3.33}$$

En utilisant la continiuté de l'opérateur trace on montre que V est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$, donc $(V, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.

Il est clair que $a(u,v)$ et $\ell(v)$ vérifient le théorème de Lax-Miligram, donc le problème (3.33) admet une solution unique $\widetilde{u} \in V$.

Exercices du chapitre 3

Exercice 3.1

Soient Ω un ouvert borné régulier connexe de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad sur \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \qquad (P)$$

1. *Supposons qu'il existe $u \in H^2(\Omega)$ solution du (P), montrer que $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx = 0$.*
2. *Montrer que l'espace $V = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \displaystyle\int_\Omega v(x)dx = 0 \right\}$ muni de la norme de $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*
3. *Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}, \forall v \in H^1(\Omega).$$

4. *Etablir une formulation variationnelle (FV) du problème (P) sous la forme $a(u,v) = \ell(v), \forall v \in V$.*
5. *Montrer que (FV) admet une solution unique.*

6. *On suppose que* $\int_\Omega f(x)dx = 0$.

   a) *En remarquant que* $v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v(x)dx = v_1 \in V, \forall v \in H^1(\Omega)$, *montrer que : u est solution de* $(FV) \Rightarrow a(u,v) = \ell(v), \forall v \in H^1(\Omega)$.

   b) *En déduire l'équivalence des problèmes* (P) *et* (FV).

Solution.

1. En appliquant la formule de Green à u et $v = 1 \in H^1(\Omega)$, on obtient $-\int_\Omega \Delta u(x)dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$, donc $\int_\Omega f(x)dx = -\int_\Omega \Delta u(x)dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$.

2. Il s'suffit de montrer que V est fermé. L'application $\mathcal{P}v = \int_\Omega v(x)dx$ est continue de $H^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, en effet $|\mathcal{P}v| \leq |\Omega|^{1/2}\|v\|_{L_2(\Omega)} = C\|v\|_{H^1(\Omega)}$. Comme $V = \mathcal{P}^{-1}(\{0\})$, alors V est fermé dans $H^1(\Omega)$, d'où V est un espace de Hilbetrt.

3. On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V telle que :

$$\|w_n\|_{H^1(\Omega)} \geq n\|\nabla w_n\|_{L_2(\Omega)}.$$

   Soit $v_n = \frac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}$, donc $v_n \in V, \forall n \in \mathbb{N}$, $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ et $\|\nabla v_n\|_{L_2(\Omega)} \longrightarrow 0$.

   La suite (v_n) est bornée dans $H^1(\Omega)$. Donc (d'après le théorème de Rellich-Kondrachov), il existe une sous suite extraite notée aussi (v_n) converge dans $L_2(\Omega)$, c'est à dire qu'il existe $v \in L_2(\Omega)$ telle que : $\|v_n - v\|_{L_2(\Omega)} \longrightarrow 0$. Comme $\|\nabla v_n\| \longrightarrow 0$, alors (v_n) est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, donc converge vers v dans $H^1(\Omega)$, comme V est fermé alors $v \in V$, de plus $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$ et $\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} = 0$. Donc $\nabla v = 0$ d'où $v = C$ (car Ω est connexe), et comme $v \in V$ alors $\int_\Omega v(x)dx = 0$ donc $v = 0$ ceci contredit le fait que $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

4. $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla(x)dx$ et $\ell(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx$.

5. Par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut voir que $a(.,.)$ est bilinéaire. Par l'inégalité de Cauchy-Scwartz, nous obtenons $\forall u, v \in V$: $|a(u,v)| = \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$, donc $a(.,.)$ est continue.

   D'après la question 3), on a $\forall v \in V : a(v,v) = \|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega)} \geq \dfrac{1}{C^2}\|v\|^2_{H^1(\Omega)}$, donc $a(.,.)$ est coercive.

   Par linéarité de l'intégrale, ℓ est linéaire. Par l'inégalité de Cauchy-Scwartz,on a $|\ell(v)| \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}\|f\|_{L_2(\Omega)} = c\|v\|_{H^1(\Omega)}$ donc ℓ est continue. Donc par le théorème de Lax-Miligram, le problème (FV) admet une solution unique.

6. On suppose que $\int_\Omega f(x)dx = 0$.

   a) Puisque $v_1 \in v, \forall v \in H^1(\Omega)$, nous avons : *u est solution de* $(FV) \Rightarrow a(u,v_1) = \ell(v_1), \forall v \in H^1(\Omega)$. Remarquons que $a(u,v_1) = a(u,v)$ et $\ell(v_1) = \ell(v)$ (car $\int_\Omega f(x)dx = 0$) d'où

   $$u \text{ est solution de } (FV) \Rightarrow a(u,v) = \ell(v), \forall v \in H^1(\Omega).$$

   b) On a $(P) \Longrightarrow (FV)$ (question 4)). Montrons que $(FV) \Longrightarrow (P)$, on a

   $$u \text{ est solution de } (FV) \Rightarrow a(u,v) = \ell(v), \forall v \in H^1(\Omega).$$

En particulier

$$u \text{ est solution de } (FV) \Rightarrow a(u,v) = \ell(v), \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Donc $\langle -\Delta u - f, v\rangle_{L_2(\Omega)} = 0, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L_2(\Omega)$ nous obtenons $-\Delta u = f$ sur Ω.

D'autre part, la formule de Green nous donne $a(u,v) = \ell(v) \forall v \in H^1(\Omega) \implies \langle -\Delta u - f, v\rangle_{L_2(\Omega)} + \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial u} d\sigma = 0, \forall v \in H^1(\Omega)$ ce qui implique (puisque $-\Delta u = f$ sur Ω) $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial u} d\sigma,\ \forall v \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.
Par densité de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $L_2(\partial\Omega)$ nous obtenons $\dfrac{\partial u}{\partial u} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Exercice 3.2

On considère le problème

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{sur} \quad \Omega && (3.34)\\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + u &= g \quad \text{sur} \quad \Gamma, && (3.35) \end{aligned}$$

où Ω est un un ouvert borné connexe régulier, $f \in L_2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\Gamma)$.

1. Montrer qu'il existe $c > 0$ telle que

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq c\Big(\|u\|^2_{L_2(\Gamma)} + \||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)}\Big), \forall u \in H^1(\Omega). \qquad (3.36)$$

2. A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de solution faible du problème (3.34)-(3.35).

Solution.

1. On raisonne par l'absurde, suppons qu'il existe une suite (v_n) d'élément de

$H^1(\Omega)$ telle que

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega)} \geq n\Big(\|v_n\|_{L_2(\Gamma)} + \||\nabla v_n|\|_{L_2(\Omega)}\Big), \forall n \in \mathbb{N},$$

On pose $w_n = \dfrac{v_n}{\|v_n\|_{H^1(\Omega)}}$ alors

$$\|w_n\|_{H^1(\Omega)} = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\nabla w_n\|_{L_2(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad et \quad \|w_n\|_{L_2(\Gamma)} \;=\; \|\gamma_0 w_n\|_{L_2(\Gamma)} \longrightarrow 0. \tag{3.37}$$

D'autre part w_n est une suite bornée dans $H^1(\Omega)$, d'après le théorème de Rellich-Kondrachov on peut extraire une sous suite w_{n_k} qui converge dans $L_2(\Omega)$, d'où l'existance de $w \in L_2(\Omega)$ telle que $\|w_{n_k} - w\|_{L_2(\Omega)} \longrightarrow 0$, et comme $\|\nabla w_{n_k}\|_{L_2(\Omega)} \longrightarrow 0$ la suite (w_{n_k}) est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$ ce qui implique $w \in H^1(\Omega)$. Par passage à la limite dans (3.37) il vient,

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} = 1, \quad \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)} = 0 \quad et \quad \|\gamma_0 w\|_{L_2(\Gamma)} = 0,$$

ce qui implique

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} = 1, \quad \nabla w = 0 \quad et \quad sur \quad \Omega \quad et \quad \gamma_0 w = 0 \quad sur \Gamma,$$

$\nabla w = 0$ sur Ω et Ω connexe implique $w = c$ sur Ω, et comme la trace d'une fonction constante et cette constante elle même, alors $w = c = 0$ sur Ω ceci contredit le fait que $\|w\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

2. Une formulation variationnelle de ce problème est

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_\Gamma u(x)v(x)dx}_{a(u,v)} \;=\; \underbrace{\int_\Omega f(x)v(x)dx + \int_\Gamma g(x)v(x)}_{\ell(v)ds}, \forall v \in H^1(\Omega) \tag{3.38}$$

Il est clair que $a(u,v)$ est une forme bilinéaire continue sur $H^1(\Omega)$ et $\ell(v)$ est une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega)$(utiliser l'inégalité de C.S et la continuité de γ_0

de $H^1(\Omega)$ dans $L_2(\Gamma)$).

D'autre par l'inégalité (3.36) assure que

$$a(u,u) = \||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Gamma)} \geq \frac{1}{c}\|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \forall u \in H^1(\Omega).$$

D'après le théorème de Lax-Miligram le problème (3.38) admet une solution unique $\widetilde{u} \in H^1(\Omega)$.

Exercice 3.3

Soient Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n, T \in H^{-1}(\Omega), L = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j})$ *(à coefficients dans* $L_\infty(\Omega)$ *et uniformément elliptique) et* $g \in (L_\infty(\Omega))^n$ *avec* $div(g) = 0$. *Montrer que :*

1) $\int_\Omega (g \cdot \nabla u) u dx = 0, \forall u \in H^1_0(\Omega)$

2 *Il existe un unique* $u \in H^1_0(\Omega)$ *tel que*

$$Lu + g \cdot \nabla u \;=\; T \tag{3.39}$$

dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Solution.

1) On a $div(ug) = \nabla u \cdot g + u div(g) = \nabla u \cdot g$, donc

$$\int_\Omega (g \cdot \nabla u) u dx = \int_\Omega div(ug) u dx$$

en appliquant la formule de Green et le fait que $u = 0$ sur $\partial\Omega$ on obtient

$$\int_\Omega (g \cdot \nabla u) u dx = -\int_\Omega (g \cdot \nabla u) u dx$$

donc $\displaystyle\int_\Omega (g\cdot\nabla u)u dx = 0, \forall u \in H_0^1(\Omega)$.

2) Par la formule de Green,

$$\langle Lu, v\rangle_{H_0^1,H^{-1}} = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega a_{i,j}\nabla u\cdot\nabla v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Soit $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ Si $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (3.39) alors

$$\underbrace{\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla v dx + \int_\Omega (g.\nabla u)v dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\langle T, v\rangle}_{\ell(v)}, \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.40}$$

On a

$$|a(u,v)| \leq n \sup_{1\leq i,j\leq n}\|a_{i,j}\|_{L_\infty(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{(L_\infty(\Omega))^n}\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}, \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

donc a est continue sur $(H_0^1(\Omega))^2$.

D'après la question précédante, le fait que L est elliptique et l'inégalité de poincaré on a

$$a(u,u) = \int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla u dx \geq \alpha^2\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \geq c\alpha^2\|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

donc a est coercive.

Il est clair que ℓ est linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. D'après le théorème de Lax-Miligram il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ unique solution de (3.40). En particulier,

$$\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla v dx + \int_\Omega (g.\nabla u)v dx = \langle T, v\rangle, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

en intégrant par partie il vient $\langle Lu + g\cdot\nabla u, v\rangle = \langle T, v\rangle, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$ donc $Lu + g\cdot\nabla u = T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exercice 3.4

On considère le problème

$$(P) \quad \begin{cases} -u'' + u = f \quad sur \quad]0,1[\\ u'(0) = 1 \quad u'(1) = 0. \end{cases}$$

où $f \in L_2(]0,1[)$.

On pose $\langle S, v\rangle = \int_0^1 fvdx - v(0)$.

Montrer que

1) $S \in (H^1(]0,1[))'$.

2) $\int_0^1 u'v' + \int_0^1 uvdx = \langle S, v\rangle, \forall v \in H^1(]0,1[) \iff u \in H^2(]0,1[)$ *et* u *solution de* (P).

3) *il existe un unique* $u_0 \in H^2(]0,1[)$ *solution de* (P).

Solution.

1) On a $|v(0)| = |\int_0^x v'(t)dt - v(x)| \leq \|v\|_{C^1([0,1])}$, donc $v \longmapsto v(0)$ est une forme linéaire continue sur $C^1([0,1])$, par densité de $C^1([0,1])$ dans $H^1(]0,1[)$ cette forme se prolonge à une forme continue sur $H^1(]0,1[)$, donc

$|\langle S, v\rangle| \leq \int_0^1 |fv|dx + |v(0)| \leq C\|f\|_{L_2(]0,1[)}\|v\|_{L_2(]0,1[)} + C_1\|v\|_{H1(]0,1[)} \leq C\|v\|_{H^1(]0,1[)}$.

2) Soit $u \in H^2(]0,1[)$ solution de (P), En multipliant l'équation $-u'' + u = f$ par $v \in H^1(]0,1[)$ et en appliquant la formule de Green en prenant en consédiration les conditions $u'(0) = 1$ et $u'(1) = 0$ il vient

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 uvdx \quad = \quad \langle S, v\rangle, \forall v \in H^1(]0,1[). \tag{3.41}$$

Inversement, si u solution de (3.41) alors $u \in H^1(]0,1[)$ et

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 uvdx = \langle S, v\rangle, \forall v \in \mathcal{D}(]0,1[),$$

par intégration par partie il vient $\langle -u'' + u - f, v\rangle = 0, \forall v \in \mathcal{D}(]0,1[)$ donc

$$-u'' + u = f \quad sur \quad]0,1[,$$

On a $u \in H^1(]0,1[)$ donc $u' \in L_2(]0,1[)$ et $u'' = f - u \in L_2(]0,1[)$ donc $u \in H^2(]0,1[)$ et

$$-\int_0^1 u''vdx + \int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdx, \forall v \in H^1(]0,1[),$$

par la formule de Green

$$\int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uvdx + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = \int_0^1 fvdx, \forall v \in H^1(]0,1[)$$

En comparant avec (3.41) il veint

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = v(0), \forall v \in H^1(]0,1[)$$

donc $u'(0) = 1$ et $u'(1) = 0$ d'où u solution de (P).

Chapitre 4

Régulatité des solutions faibles

Dans le chapitre précédent, on a vu comment montrer l'existence et l'unicite des solutions faibles de problème aux limite de seconde ordre suivant

$$Lu = f \quad \text{sur} \quad \Omega, \tag{4.1}$$

$$\text{Conditions sur} \quad u \quad \text{au bord de} \quad \Omega. \tag{4.2}$$

Dans ce chapitre nous allons prouver que sous certains hypothèses sur les données (Ω et f) ces solutions faibles sont des solutions fortes ou classiquess (au sens de définitions suivantes)

Définition 4.1

Une solution forte de (4.1)–(4.2) *est une fonction* $u \in H^2(\Omega)$ *verifiant* (4.1) *et* (4.2) *presque partout.*

Définition 4.2

Une solution classiqe de (4.1)–(4.2) *est une fonction* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *verifiant* (4.1) *et* (4.2) *partout.*

Proposition 4.3

u est une est soloution classique de (4.1)–(4.2) $\Longrightarrow$ *u est une solution forte de* (4.1)–(4.2)$\Longrightarrow$ *u est une solution faible de* (4.1)–(4.2).

4.1 Un exemple en dimension $n = 1$

On commence par un cas assez simple en dimension $n = 1$. Soit $f \in L_2(]0, 1[)$, on a vu que la problème

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx \quad = \quad \int_0^1 f(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1(]0, 1[) \tag{4.3}$$

addmet une solution unique $u \in H_0^1(]0, 1[)$.

Soit $\varphi \in C(]0, 1[)$, pour tout $x \in [0, 1]$ on pose

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt - x\int_0^1 \varphi(t)dt,$$

donc $\psi \in C^1(]0, 1[), \psi(0) = \psi(1) = 0$ et la dérrivée de ψ au sense de distribution égale p.p. à sa dérrivée classique.

$$\psi'(x) = \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(s)ds, \quad p.p.x \in]0, 1[,$$

donc $\psi \in H_0^1(]0,1[)$.

En prenant $v = \psi$ dans (4.3) il vient

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx - \int_0^1 \varphi(x)\int_0^1 u'(x)dx = \int_0^1 f(x)\psi(x)dx.$$

On pose $F = \int_0^x f(s)ds$ pour tout $x \in [0,1]$, si f est continue sur $[0,1]$ alors F est de classe C^1 et $F' = f$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \psi(x)f(x)dx = \int_0^1 F'(x)(x)\psi(x)dx &= -\int_0^1 F(x)\psi'(x)dx \\ &= -\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx + \int_0^1 f(x)\varphi(s)ds\int_0^1 F(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Maintenant, on pose $c = \int_0^1 u'(x)dx + \int_0^1 F(x)dx$ alors

$$\int_0^1 (u'(x) + F(x))\varphi(x)dx = c\int_0^1 \varphi(x), \quad \forall \varphi \in C(]0,1[),$$

et comme $C(]0,1[)$ est dence dans $L_2(]0,1[)$ il vient $u' = -F + c \quad p.p. \quad dans \quad]0,1[$.

Soit $w = \int_0^x (F(s) + c)ds$ pour tout $x \in [0,1]$, donc w est de classe C^2 et $w' = -F + c$ p.p. sur $]0,1[$, doc $u' = w'$ p.p. ce qui implique $u - w = c$ p.p., en identifiant u à sa représrntant continu, on déduit que u et de classe C^2, car $u' = -F$ et $u'' = -f$.

Proposition 4.4

Si $f \in C([0,1])$ *alors le problème* $\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$ *admet une solution classique unique.*

4.2 Injections de Sobloev

Proposition 4.5

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

- Pour tout $k, m \in \mathbb{N}$ tels que $m > n/2 + k$, on a $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^k(\Omega)$.

- Si $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ou Ω et de classe C^k avec Γ est bornée, $m > n/2 + \alpha, \alpha \in \mathbb{N}$ et $k \geq \alpha$ alors $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega})$.

4.3 Régularité des solutions faibles du problème de Dirichlet homogème

Dans cette section nous allons prendre quelques exemples sur des problèmes de Dirichlet sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 2$.

4.3.1 $\Omega = \mathbb{R}^n$

Théorème 4.6

Soit $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, soit w l'unique solution du problème

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} u(x) v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) v(x) dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n) \tag{4.4}$$

alors $w \in H^2(\mathbb{R}^n)$, de plus il existe $C > 0$ tel que $\|w\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$.

Démonstration.

Soit $\{e_i\}_{i=1,..,n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note

$$D_h w = \frac{w(\cdot + he_i) - w}{h} \quad et \quad D_{-h}D_h w = \frac{w(\cdot + he_i) - 2w + w(\cdot - he_i)}{h^2}$$

alors $D_{-h}D_h w \in H^1(\mathbb{R}^n)$, on prend $v = D_{-h}D_h w$ dans (4.4) donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla D_h w(x)|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |D_h w(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D_{-h} D_h w(x) dx$$

ce qui implique

$$\|D_h w\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \|D_{-h}D_h w\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.5}$$

D'autre part on a

$$\|D_{-h}D_h w\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla D_h w\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq \|D_h w\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.6}$$

(voir le lemme suivant). En combinant (4.5) et (4.6), il vient

$$\|D_h w\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

donc $\dfrac{\partial w}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}^n), i = 1, 2, ..., n$ d'où l'appartenance de w à $H^2(\mathbb{R}^n)$ et l'existance de $C > 0$ tel que $\|w\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$. ■

Lemme 4.7

Si $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ alors les propriétés suivantes sont équivalantes :

1) $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$,

2) *Il exsiste une constante $C(u) > 0$ telle que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \Big| \leq C \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, i = 1, .., n,$$

3) *Il existe $C(u) > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ $\|u(\cdot + h) - u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq C|h|$,*

on peut prendre $C(u) = \|\nabla u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ dans 2) et 3).

Corollaire 4.8

Si $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ et w est la solution de problème (4.4) alors $w \in H^{m+2}(\mathbb{R}^n)$,

de plus il existe $C > 0$ tel que $\|w\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$.

Démonstration.

Supposons $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, on a déja prouver que $\dfrac{\partial w}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}^n), i = 1, 2, ..., n$.
Pronnons $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et remplaçons v par $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ dans (4.4), il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v(x) dx, \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n), \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v(x) dx, \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n),$$

par le théorème 4.6 il vient $\frac{\partial w}{\partial x_i}(x) \in H^2(\mathbb{R}^n)$ d'où l'appartenance de w à $H^3(\mathbb{R}^n)$.

pour $m \geq 2$ la démonstration ce fait par récurence. ■

4.3.2 $\Omega = \mathbb{R}^n_+$

On désigne par Γ la frontière de $\mathbb{R}^n_+$, si $h \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ on note $h//\Gamma$.

Lemme 4.9

Soit $h//\Gamma$.

1. *Si* $u \in H_0^1(\mathbb{R}^n_+)$ *alors* $u(\cdot + h) \in H_0^1(\mathbb{R}^n_+)$.
2. $\|D_h v\|_{L_2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|\nabla v\|_{L_2(\mathbb{R}^n_+)}, \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$

Lemme 4.10

(Théorème de Hahn-Banach) Soit p *une application définie d'un espace vectoriel* E *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant*

$$p(ax) = ap(x), \forall x \in E, \forall a \in \mathbb{R} \quad et \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E.$$

Soit G *un sous-espace vectoriel de* E *et* $g : G \to \mathbb{R}$ *une apàplication linéaire telle que*

$$g(x) \leq p(x), \forall x, y \in G.$$

Alors il existe une forme linéaire f *définie sur* E *telle que*

$$f(x) = g(x), \forall x \in G \quad et \quad f(x) \leq p(x), \forall x \in E.$$

Théorème 4.11

Soit $f \in L_2(\mathbb{R}^n_+)$ *et* w *la solution de problème*

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n_+} u(x)v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} f(x)v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\mathbb{R}^n_+) \tag{4.7}$$

alors $w \in H^2(\mathbb{R}^n_+)$, *de plus il existe* $C > 0$ *tel que* $\|w\|_{H^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n_+)}$.

Démonstration.

On a $w \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$ donc $D_{-h}D_h w \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$ pour tout $i = 1, 2, ..., n-1$. On prend $v = D_{-h}D_h$ dans (4.7) il vient

$$\|D_h w\|^2_{H^1(\mathbb{R}_+^n)} \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+^n)} \|D_{-h}D_h\|_{L_2(\mathbb{R}_+^n)}, \tag{4.8}$$

qui devient grâce au lemme 4.9

$$\|D_h w\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)} \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+^n)}. \tag{4.9}$$

D'autre part, pour tout $j = 1, 2, .., n$ et $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} D_h\Big(\frac{\partial w}{\partial x_j}\Big)(x)v(x)dx = -\int_{\mathbb{R}_+^n} w(x)D_{-h}\Big(\frac{\partial v}{\partial x_j}\Big)(x)dx$$

donc par (4.9) il vient

$$\Big|\int_{\mathbb{R}_+^n} w(x)D_{-h}\Big(\frac{\partial v}{\partial x_j}\Big)(x)dx\Big| \leq, \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+^n)}\|v\|_{L_2(\mathbb{R}_+^n)}, \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n).$$

passon à la limite quand $h \to 0$ nous obtenons

$$\Big|\int_{\mathbb{R}_+^n} w(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k}(x)dx\Big| \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+^n)}\|v\|_{L_2(\mathbb{R}_+^n)}, \tag{4.10}$$

pour tous $1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq k \leq n-1$.

Revenons nous à l'équation (4.7), elle implique

$$-\int_{\mathbb{R}_+^n} w(x)\triangle v(x)dx + \int_{\mathbb{R}_+^n} w(x)v(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n),$$

donc

$$\Big|\int_{\mathbb{R}_+^n} w(x)\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_n}(x)dx\Big| \leq \sum_{i=1}^{n-1}\Big|\int_{\mathbb{R}_+^n} w(x)\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_i}(x)dx\Big| + \Big|\int_{\mathbb{R}_+^n}(f-w)(x)v(x)dx\Big|,$$

l'inégalité (4.10) nous donne

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n_+} w(x)\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_n}(x)dx\Big| \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n_+)}\|v\|_{L_2(\mathbb{R}^n_+)}, \tag{4.11}$$

En combinant (4.10) et (4.11) nouns obtenons

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n_+} w(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k}(x)dx\Big| \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n_+)}\|v\|_{L_2(\mathbb{R}^n_+)}, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+) \quad 1 \leq j,k \leq n.$$

■

Corollaire 4.12

Soit $f \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$ et w la solution de problème (4.7) alors $w \in H^{m+2}(\mathbb{R}^n_+)$, de plus il existe $C > 0$ tel que $\|w\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^n_+)}$.

Démonstration.

Soit $f \in H^1(\mathbb{R}^n_+))$. Alors $w \in H^2 H^1_0(\mathbb{R}^n_+) \cap H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$.

Pour tout $i = 1, ..., n-1$ on a $D_h w \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$, d'après le lemme 4.9

$$\|D_h w\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|w\|_{H^2(\mathbb{R}^n_+)},$$

donc il existe une suite $h_j \to 0$ telle que $D_{h_j} w$ converge faiblement vers g dans $H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ donc dans $L_2(\mathbb{R}^n_+)$. Comme

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} D_{h_j}(x)v(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} w(x)D_{-h_j}v(x)dx, \forall \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+),$$

passons à la limite quand $j \to 0$ nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} g(x)v(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} w\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx, \forall \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+),$$

donc $\dfrac{\partial w}{\partial x_i} = g \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$.

En remplaçant v par $\frac{\partial v}{\partial x_i}, i = 1, 2, ..., n-1$, dans (4.7) nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \nabla\Big(\frac{\partial w}{\partial x_i}\Big)(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)v(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n),$$

donc par le théorème 4.11 $\dfrac{\partial w}{\partial x_i} \in H^2(\mathbb{R}_+^n)$, d'où $w \in H^3(\mathbb{R}_+^n)$, on conclut par récurence sur m. ■

4.3.3 Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

Dans ce cas, on donne l'énoncé d'un théorème de régularité dont la démonstration repose sur les deux cas précédentes. on omite la démonstration qui est trop téchnique.

Théorème 4.13

Soit Ω un ouvert borné de classe $C^2, f \in L_2(\Omega)$ et w l'unique solution du problème

$$\int_{\Omega} \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_{\Omega} u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.12)$$

Alors

1. *$w \in H^2(\Omega)$, de plus il existe une constante C dépend seulement de Ω telle que $\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)}$.*
2. *Si de plus Ω est de classe C^{m+2} et $f \in H^m(\Omega)$ alors $w \in H^{m+2}(\Omega)$ et il*

existe une constante C dépend seulement de (Ω) telle que $\|w\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)}$.

3. *En particulier, si $m > n/2$ alors $w \in C^2(\overline{\Omega})$ et si Ω est de classe C^∞ et $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ alors $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Le théorème 4.13 affirme que si $f \in L_2(\Omega)$ alors $w \in H^2(\omega)$ pour tout $\omega \subset\subset \Omega$ et que $\|w\|_{H^2(\omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)}$. L'exemple suivant montre qu'on a pas forcément $\|w\|_{H^2(\omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\omega)}$.

Exemple 4.14

Soit $\Omega =]-1,1[$ et $f = 0$ sur $]-1,0[$ et $f = 1$ sur $[0,1[$, alors

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \quad si \quad x \in]-1,0[\\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \quad si \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

est la solution du problème de Dirichlet. Si $I =]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}[$ alors $I \subset\subset \Omega$ mais il n'existe auqu'une constanta $C > 0$ telle que $\|w\|_{H^2(I)} \leq C\|f\|_{L_2(I)} = 0$.

4.4 Régularité des solutions faibles du problème de Neumman homogème

On regroupe les résultats du régularité des solutions du problème de Neumman

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_\Omega u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{4.13}$$

dans les théorèmes suivants dont leurs démonstrations sont anloques à celles de la section précédantes :

Théorème 4.15

Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$. *Soient* $f \in L_2(\Omega)$ *et* w *l'unique solution du problème* (4.13). *Alors*

1. $w \in H^2(\Omega)$, *de plus il existe une constante* C *dépend seulement de* Ω *telle que* $\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)}$.
2. *Si* $f \in H^m(\Omega)$ *alors* $w \in H^{m+2}(\Omega)$ *et il existe une constante* C *telle que* $\|w\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)}$.

Théorème 4.16

Ω *désigne* $\mathbb{R}^n_+$ *ou un ouvert borné de classe* C^2. *Soient* $f \in L_2(\Omega)$ *et* w *l'unique solution du problème* (4.13). *Alors*

1. $w \in H^2(\Omega)$, *de plus il existe une constante* C *dépend seulement de* Ω *telle que* $\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)}$.
2. *Si de plus* Ω *est de classe* C^{m+2} *et* $f \in H^m(\Omega)$ *alors* $w \in H^{m+2}(\Omega)$ *et il existe une constante* C *dépend seulement de* (Ω) *telle que* $\|w\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)}$.
3. *En particulier, si* $m > n/2$ *alors* $w \in C^2(\overline{\Omega})$ *et si* Ω *est de classe* C^∞ *et* $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *alors* $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Exercices du chapitre 4

Exercice 4.1

On considère le problème

$$(P)\quad \begin{cases} -u'' + u' + u = f \quad sur \quad]0,1[\\ u(0) = 1 \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

où $f \in H^{-1}(]0,1[)$.

1) *Etablir une formulation variationnelle du problème* (P) *et montrer qui'il admet une solution faible unique* w.

2) *Montre que* $f \in H^1(]0,1[) \Rightarrow w \in H^3(]0,1[)$.

Solution

1) Si $u \in H^1(]0,1[)$ alors $u \in H_0^1(]0,1[)$ et $-u'' + u' + u = f$ dans $H^{-11}(]0,1[)$ donc

$$\langle f, v\rangle = \langle -u'' + u' + u, v\rangle = \int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 u'vdx + \int_0^1 uvdx, \forall v \in H_0^1(]0,1[).$$

On montre facilement par le théorème de Lax-Miliqram que (P) admet une solution faible unique w.

2) On a $w \in H_0^1(]0,1[)$ et $\langle f, v\rangle = \int_0^1 w'v'dx + \int_0^1 w'vdx + \int_0^1 wvdx = \langle -w'' + w' + w, v\rangle, \forall v \in \mathcal{D}(]0,1[)$. Donc $-w'' + w' + w = f$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$.

$w \in H_0^1(]0,1[)$ et $f \in H^1(]0,1[) \Rightarrow w, w' \in L_2(]0,1[)$ et $w'' = w' + w - f \in L_2(]0,1[)$, donc $w \in H^2(]0,1[)$,

de même $w \in H^2(]0,1[)$ et $f \in H^1(]0,1[) \Rightarrow w, w' \in H^1(]0,1[)$ donc $w'' = w' + w - f \in H^1(]0,1[)$ ce qui implique $w \in H^3(]0,1[)$.

Exercice 4.2

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, n > 2$ et $h \in H^{n+1}(\Omega)$. Montrer que si Ω est suffisamment régulier, alors il existe un unique $w \in C^2(\overline{\Omega})$ tel que $-\Delta w(x) + w(x) = 0, \forall x \in \Omega$ et $w(x) = h(x), \forall x \in \partial\Omega$.

Solution.

Soit le ptoblème : (p) $\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \quad sur \quad \Omega \\ u = h \quad sur \quad \partial\Omega \end{cases}$.

On a $0 \in L_2(\Omega)$ et $\gamma_0(h) \in H^{1/2}(\Omega)$, donc (P) admet une solution faible unique $w \in H_0^1(\Omega)$,

de plus $-\Delta w + w = -\Delta h + h$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (voir Exemple 3.4).

Donc $\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v dx + \int_\Omega wvdx = \int_\Omega (-\Delta h + h)vdx, \forall v \in H_0^1(\Omega)$, comme $-\Delta h + h \in H^{n-1}(\Omega)$, alors $w \in H^{n+1}(\Omega)$ si Ω et de classe C^{n+1}.

Comme $n - 1 > n/2$ alors $w \in C^2(\overline{\Omega})$.

On sait que $-\Delta w + w = 0 p.p.$ sur Ω et $w = h$ p.p. sur $\partial\Omega$, le fait que $w \in C^2(\overline{\Omega})$ implique $(-\Delta w + w)(x) = 0, \forall x \in \Omega$ et $w = h, \forall x \in \partial\Omega$.

Exercice 4.3

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^2, $f \in H^{-1}(\Omega)$ et λ un nombre réel négatif, on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & sur \quad \Omega, \\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.14}$$

1) *Etablir une formulation variationnelle du problème* (4.14).

2) *Déterminer une condition sur λ pour que le problème* (4.14) *admet une solution faible unique w (dans la suite, on suppose que λ vérifie cette condition).*

3) *Supposons que $f \in L_2(\Omega)$, montrer que w est une solution forte de* (4.14).

4) *Sur quelles hypothèses(sur f et Ω), w soit solution classique de* (4.14).

Solution.

1) Soit $u \in H^2(\Omega)$ solution de (1), alors $(-\Delta u + \lambda u) \in L_2(\Omega)$ et $-\Delta u + \lambda u = f$ dans $H^{-1}(\Omega)$, donc par la formule de Green, on a

$$\underbrace{\langle f, v \rangle}_{\ell(v)} = -\int_\Omega \Delta u v dx + \lambda \int_\Omega u v dx = \underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \lambda \int_\Omega u v dx}_{a(u,v)}, \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

la formulation variationnelle est

$$\text{"torver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que } a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega))\text{"}.$$

2) On montre par l'inégalité de Cauchy-Shwartz que $|a(u,v)| \leq \max(1, |\lambda|)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$, danc $a(\cdot,\cdot)$ est contuniue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Examinons maintenant la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$, soit $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$a(u,u) = \||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)} + \lambda \|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \qquad (*)$$

Par l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C_\Omega > 0$ tell que $\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C_\Omega \||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)}$, donc $\lambda \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \geq \lambda C_\Omega \||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)}$, par $(*)$ et le fait que $u \mapsto \||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)}$ définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalante à la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$ il vient

$$a(u,u) \geq (1+\lambda C_\Omega)\||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)} \geq C(1+\lambda C_\Omega)\||\nabla u|\|^2_{H^1(\Omega)},$$

pour $\lambda > -1/C_\Omega$, d'où la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$.

Par définition de $H^{-1}(\Omega)$, ℓ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. Donc par le théorème de Lax-Miligram, le problème (1) admet une solution faible unique $w \in H_0^1(\Omega)$.

3) Il s'agit de montrer que w vérifie (1) et $w \in H^2(\Omega)$, on a $a(w,v) = \ell(v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$, en particulier $a(w,v) = \ell(v), \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc par la formule de Green $\langle -\Delta w + \lambda w, v\rangle = \langle f, v\rangle, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc $-\Delta w + \lambda w = f$ p.p. sur Ω, ce qui imlique $\Delta w = \lambda w - f \in L_2(\Omega)$ donc $w \in H^2(\Omega)$. Comme $w \in H^2(\Omega)$ alors $w = 0$ sur $\partial\Omega$, en conclusion w est une solution de (1) et $w \in H^2(\Omega)$.

4) Supposons $f \in H^m(\Omega)$ et Ω de classe C^{m+2} alors $w \in H^{m+2}(\Omega)$ (voir le cour), si $m > n/2$ alors $H^{m+2}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$ donc w est une solution classique de (1).

Exercice 4.4

Soit $f \in L_2(]0,1[)$*. On considère le problème aux limites :*

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -u'' - u' + u = f & : dans \quad]0,1[, \\ u(0) = u(1), \\ u'(0) = u'(1). \end{cases}$$

On pose : $V = \{v \in H^1(]0,1[) : v(0) = v(1)\}$.

1. *Soit* $(y_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'éléments de* $H^1(]0,1[)$ *telle que* $y_n(0) = y_n(1)$ *pour tout* $n \geq 0$ *et* $y_n \to y$ *dans* $H^1(]0,1[)$.

   a) *Soit* $n \geq 0$*. Vérifier que* $|y(0) - y(1)| \leq 2\|y_n - y\|_{\mathcal{C}([0,1])}$*, en déduire que* $y(0) = y(1)$*(Rappelons que :* $H^1(]0,1[) \hookrightarrow \mathcal{C}[0,1]$*).*

   b)*Montrer que* $(V, \|\cdot\|_{H^1(]0,1[)})$ *est un espace de Hilbert.*

2. *Etablir une formulation variationnelle du problème* (P_1).

3. *Vérifier que :* $2\displaystyle\int_0^1 u'(x)u(x)dx \leq \|u\|^2_{H^1(]0,1[)}, \forall u \in H^1(]0,1[)$.

4. *Montrer que* (P_1) *admet une solution faible unique (notée* $\widetilde{u}$*).*

5. *Montrer que* $\widetilde{u}$ *est une solution forte de* (P_1).

Solution.

$V = \{v \in H^1(]0,1[) : v(0) = v(1)\}$

1. a) Soit $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
|y(0)-y(1)| &= |y(0)-y_n(0)+\underbrace{y_n(0)-y_n(1)}_{=0}+y_n(1)-y(1)| \\
&\leq |y(0)-y_n(0)|+|y_n(1)-y(1)|| \\
&\leq \sup_{0\leq x\leq 1}|y(x)-y_n(x)|+\sup_{0\leq x\leq 1}|y(x)-y_n(x)| \\
&= 2\|y_n-y\|_{C([0,1])}.
\end{aligned}$$

Cette inégalité et l'injection $H^1(]0,1[) \hookrightarrow \mathcal{C}[0,1]$ impliquent $|y(0)-y(1)| \leq 2\|y_n-y\|_{H^1([0,1])}, \forall n \geq 0$, par passage à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient $|y(0)-y(1)| = 0$, donc $y(0) = y(1)$.

b) Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy (pour la norme de $H^1(]0,1[)$) d'éléments de V c-à dire $v_n \in H^1(]0,1[)$ et $v_n(0) = v_n(1)$ pour tout $n \geq 0$. Comme $H^1(]0,1[)$ est complet alors il existe $v \in H^1(]0,1[)$ telle que $v_n \to v$ dans $H^1]0,1[$. D'après 1)a) on a $v(0) = v(1)$ donc $v \in V$, ce qui implique que V est complet donc V est un espace de Hilbert.

2. Soit $u \in H^2(]0,1[)$ solution de (P_1). Multiplions l'équation $-u''-u'+u = f$ par $v \in V$ et intégrons sur $]0,1[$ nous obtenons

$$-\int_0^1 u''vdx - \int_0^1 u'vdx + \int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdx, \forall v \in V,$$

par intégration par partie, il vient

$$\int_0^1 u'v'dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) - \int_0^1 u'vdx + \int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdx, \forall v \in V.$$

Comme $v(0) = v(1)$(car $v \in V$) et $u'(0) = u'(1)$(car u est solution de (P_1)), alors

$$-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) = v(0)(-u'(0) + u'(1)) = 0.$$

Donc une formulation variationnelle du problème (P_1) est : trouver $u \in V$ telle que

$$\underbrace{\int_0^1 u'v'dx - \int_0^1 u'vdx + \int_0^1 uvdx}_{:=a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 fvdx}_{:=\ell(v)}, \forall v \in V.$$

3. Par l'inégalité de Cauchy-Shwartz on a : $2\int_0^1 u'(x)u(x)dx \leq 2\|u'\|_{L_2(]0,1[)}\|u\|_{L_2(]0,1[)}, \forall u \in H^1(]0,1[)$, en utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2, \forall a, b \in \mathbb{R}$ on trouve
$2\int_0^1 u'(x)u(x)dx \leq \|u'\|^2_{L_2(]0,1[)} + \|u\|^2_{L_2(]0,1[)} = \|u\|^2_{H^1(]0,1[)}, \forall u \in H^1(]0,1[)$.

4. Il est clair que $a(\cdot,\cdot)$ est une forme linéaire sur V, de plus, par l'inégalité de Cauchy-Shwartz, pour tout $u, v \in V$, on a

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \|u'\|_{L_2(]0,1[)}\|v'\|_{L_2(]0,1[)} + \|u'\|_{L_2(]0,1[)}\|v\|_{L_2(]0,1[)} + \|u\|_{L_2(]0,1[)}\|v\|_{L_2(]0,1[)} \\
&= \|u'\|_{L_2(]0,1[)}\|v'\|_{L_2(]0,1[)} + \|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{L_2(]0,1[)} \\
&\leq \|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v'\|_{L_2(]0,1[)} + \|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{L_2(]0,1[)} \\
&= \|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)},
\end{aligned}$$

donc $a(\cdot,\cdot)$ est continue sur V.

D'autre part, pour tout $u \in V$, on a

$$a(u,u) = \|u\|^2_{H^1(]0,1[)} - \int_0^1 u'udx \geq \|u\|^2_{H^1(]0,1[)} - (1/2)\|u\|^2_{H^1(]0,1[)} = (1/2)\|u\|^2_{H^1(]0,1[)}.$$

(d'après la question 3)), donc $a(\cdot,\cdot)$ est $(1/2)-$coercive sur V.

Il est facile de vérifier que ℓ est une forme linéaire continue sur V. D'après le théorème de Lax-Miligram, le problème (P_1) admet une solution faible unique $\widetilde{u} \in V$.

5. On a $a(\widetilde{u}, v) = \ell(v), \forall v \in V$, en particulier $a(\widetilde{u}, v) = \ell(v), \forall v \in \mathcal{D}(]0,1[)$ (car $\mathcal{D}(]0,1[) \subset V$) ce qui donne

$$\langle \widetilde{u}', v' \rangle - \langle \widetilde{u}', v \rangle + \langle \widetilde{u}, v \rangle = \langle f, v \rangle, \forall v \in \mathcal{D}(]0,1[),$$

   donc $-\widetilde{u}'' - \widetilde{u}' + \widetilde{u} = f$ p.p. sur $]0,1[$.

   On a $\widetilde{u}'' = -f - \widetilde{u}' + \widetilde{u} \in L_2(]0,1[)$ donc $\widetilde{u} \in H^2(]0,1[)$. En intégrant par partie dans la première intégralle de l'égalité $a(\widetilde{u}, v) = \ell(v), \forall v \in V$ il vient

$$-\int_0^1 \widetilde{u}'' v dx + \widetilde{u}'(1)v(1) - \widetilde{u}'(0)v(0) - \int_0^1 \widetilde{u}' v dx + \int_0^1 \widetilde{u} v dx = \int_0^1 f v dx, \forall v \in V.$$

donc $v(1)(\widetilde{u}'(1) - \widetilde{u}'(0)) = 0, \forall v \in V$ (car $-\widetilde{u}'' - \widetilde{u}' + \widetilde{u} = f$ p.p. sur $]0,1[$ et $v(0) = v(1)$) donc $\widetilde{u}'(0) = \widetilde{u}'(1)$. Enfin $\widetilde{u}(0) = \widetilde{u}(1)$ car $u \in V$.

Chapitre 5

Principe de maximum

On commence par une proposition concernant les fonctions qui opère sur les espaces de Sobolev c-à-dire les fonctions f vérifiant la propriété $f \circ u \in H^1(\Omega), \forall u \in H^1(\Omega)$.

Proposition 5.1

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction à valeurs réelles telle que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et f' bornée alors f opère sur $H^1(\Omega)$ et $\nabla f \circ u = (f' \circ u)\nabla u, \forall u \in H^1(\Omega)$, de plus l'opérateur

$$T_f : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$$

$$u \mapsto f \circ u$$

est continu.

Démonstration.

On approche $u \in H^1(\Omega)$ par une suite u_j d'éléments de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ (ce dérnier est dense dans $H^1(\Omega)$), on applique le théorème de dérivation des fonctions composées on trouve $\nabla f(u_j) = f'(u_j)\nabla u_j$. Soit $V \in (\mathcal{D}(\Omega))^n$, alors

$$\int_\Omega f(u_j)div(V)dx = -\int_\Omega f'(u_j)\nabla u_j.Vdx,$$

il suffit de montrer qu'on peut passer à la limite dans cette formule.

On a

$$|f(u_j) - f(u)| \leq \|f'\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}|u_j - u|$$

donc $f(u_j)$ converge vers $f(u)$ dans $L_2(\Omega)$, ce qui donne

$$\lim_j \int_\Omega f(u_j)div(V)dx = \int_\Omega f(u)div(V)dx.$$

par extraire une sous-suite de (u_j) on peut supposer que u_j converge presque par tout vert u, donc $f'(u_j)$ converge vers $f'(u)$. Par le théorème de convergence dominée, on déduit que $f'(u_j)$ vers $f'(u)$ dans $L_2(\Omega)$, et comme ∇u_j converge vers ∇u dans $L_2(\Omega)$ et donc

$$\lim_j \int_\Omega f'(u_j)\nabla u_j.Vdx = \int_\Omega f'(u)\nabla u.Vdx.$$

Montons maintenat la continuité de T_f. Soit u_j une suite d'éléments de $H^1(\Omega)$ converge vers $u \in H^1(\Omega)$. Il est clair que $T_f u_j$ converge vert $T_f u$ dans $L_2(\Omega)$. Regardons les gradiants,

$$\|\nabla T_f u_j - \nabla T_f u\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \|f'\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}\|\nabla u_j - \nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_\Omega |T_{f'}u_j - T_{f'}u|^2|\nabla u|^2 dx.$$

on a $\|\nabla u_j - \nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}$ converge vers 0, pour le temre $\int_\Omega |T_{f'}u_j - T_{f'}u|^2|\nabla u|^2 dx$ nous allons montrer que sa limte supérieur β égale à 0. Soit $u_{\varphi(j)}$ une sous-suite de

u_j qui réalise α, par extraore une sou-suite, on peut supposer que $u_{\varphi(j)}$ converge vert u presque par tout (puisque (u_j) converge dans $L_2(\Omega)$), l'application du théorème de convergence donminée nous donne $\displaystyle\int_\Omega |T_{f'}u_{\varphi(j)} - T_{f'}u|^2|\nabla u|^2dx = 0$. En conslusion, on a $T_f u_j)$ converge vert $T_f u$, d'où la continuité de T_f. ■

Proposition 5.2

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, alors f opère sur $H_0^1(\Omega)$ et $\nabla(f(u)) = f'(u)\nabla u$.

On note $u^+(x) = \max(u(x), 0), x \in \Omega$. Soit $k \in \mathbb{R}^+$, si $u \in H_0^1(\Omega)$ alors $(u-k)^+ \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla(u - k^+) = 1_{\{u>k\}}\nabla u = 1_{\{u\geq k\}}\nabla u$ p.p.. En particulier, $\nabla(u - k^+) = 0$ sur l'ensemble $\{u = k\}$.

Remarque 5.3

1) *Si Ω est non borné et f opère sur $H^1(\Omega)$ alors $f(0) = 0$, en effet, si u est la fonction identiquement nulle alors $u \in H^1(\Omega)$ et $f \circ u$ est la fonction constante $g : x \mapsto f(0)$, comme $g \in H^1(\Omega)$ alors $f(0) = 0$.*

2) *On peut montrer que la proposition 5.1 est encore vraie si f est Lipschitzienne et C^1 par morceaux.*

3) *Si Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut éliminer la condition f' est borné.*

5.1 Principe de maximum en dimension $n = 1$

Dans cette section $I =]a, b[$ désigne un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

Théorème 5.4

Soit $f \in L_2(I)$ et $w \in H^2(I)$ la solution du problème de Dirichlet

$$-u'' + u = f \quad sur \quad I$$

$$u(a) = \alpha \quad et \quad u(b) = \beta$$

alors

$$\min(\alpha, \beta, \inf_I f) \leq w(x) \leq \max(\alpha, \beta, \sup_I f), \quad \forall x \in I.$$

Démonstration.

On a

$$\int_\Omega w'v' + \int_\Omega wv = \int_\Omega fv, \forall v \in H_0^1(I). \tag{5.1}$$

Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que

1) G est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

2) $G(t) = 0$ pour tout $t \in]-\infty, 0]$.

Soit $K = \max(\alpha, \beta, \sup_I f)$, on suppose que $K < \infty$ et on pose $J = G(w - K)$, d'après la propostion 5.1 et la remreque 5.3 on a $J \in H^1(I)$, de plus $J \in H_0^1(I)$ car

$$J(a) = G(\alpha - K) = 0 \quad et \quad J(b) = G(\beta - K) = 0.$$

On peut prendre $v = J$ dans (5.1) pour avoir

$$\int_\Omega w'^2 G'(w-K) + \int_\Omega wG(w-K) = \int_\Omega fG(w-K),$$

En ajoutant, $-\int_\Omega KG(w-K)$ au deux membre, on obtient

$$\int_\Omega (w-K)G(w-K) = \int_\Omega (f-K)G(w-K) - \int_\Omega w'^2 G'(w-K),$$

Comme $f \leq K, G(w-K) \geq$ et $G'(w-K) \geq$ alors

$$\int_\Omega (w-K)G(w-K) =\leq 0 \quad d'o \quad (w-K)G(w-K) \leq 0,$$

d'autre part $tG(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ donc $(w-K)G(w-K) = 0$ ce qui impliqie $w \leq K$.

On termine la démonstration en remplacant w par $-w$, en effet $-w$ est solution du problème

$$-u'' + u = -f \quad sur \quad I$$

$$u(a) = -\alpha \quad et \quad u(b) = -\beta$$

et $\inf_I(-f) = -\sup_I(-f)$. ■

Corollaire 5.5

Sous le hypothèse dy théorème 5.4, on a

— *Si* $\alpha, \beta \geq 0$ *et* $f \geq 0$ *sur* I, *alors* $w \geq 0 sur\ I$.

— *Si* $\alpha = \beta = 0$ *et* $f \in L_\infty(I)$ *alors* $\|f\|_{L_\infty(I)} \leq \|w\|_{L_\infty(I)}$.

— *Si* $f = 0$ *sur* I, *alors* $\|w\|_{L_\infty(I)} \leq \max(\alpha, \beta)$.

Théorème 5.6

Soit $f \in L_2(I)$ *et* $w \in H^2(I)$ *la solution du problème de Neumman*

$$-u'' + u = f \quad sur \quad I$$

$$u'(a) = \alpha \quad et \quad u'(b) = \beta$$

alors

$$\inf_I f \leq w(x) \leq \sup_I f, \quad \forall x \in \overline{I}.$$

Démonstration.

Voir exercices. ■

Théorème 5.7

Soit $f \in L_2(I)$ *et* $w \in H^2(\mathbb{R})$ *la solution du problème de Neumman*

$$-u'' + u = f \quad sur \quad \mathbb{R}$$

alors

$$\inf_{\mathbb{R}} f \leq w(x) \leq \sup_{\mathbb{R}} f, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5.2 Principe de maximum en dimension $n > 1$

Dans cette section, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ.

Théorème 5.8

Supposons que Ω *est borné et de classe* C^1. *Soient* $f \in L_2(\Omega)$ *et* $w \in H^1(\Omega)$ *tels que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv \quad = \quad \int_\Omega fv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{5.2}$$

alors

$$\min(\inf_\Gamma u, \inf_\Omega f) \leq w(x) \leq \max(\sup_\Gamma u, \sup_\Omega f), \quad x \in \Omega.$$

Démonstration.

On itroduit une fonction $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que

$|G'(X)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$,

G est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

$G(t) = 0, \forall t \in]-\infty, 0]$.

Supposons que $K = \max(\sup_\Gamma u, \sup_\Omega f) < \infty$. Soit $J = G(w-k)$ alors $J \in H^1(\Omega)$ (grâce à la proposition 5.1), de plus $J(t) = 0$ sur Γ car $w - k$ est négatif sur Γ donc $J \in H_0^1(\Omega)$.

Prenons J comme fonction teste dans (5.2) et ajoutons $-K \displaystyle\int_\Omega J(w-K)$ au deux membres on obtient

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 G'(w-K) + \int_\Omega (w-K)G(w-K) = \int_\Omega (f-K)G(w-k),$$

ce qui implique

$$\int_\Omega (w-K)J(w-K) \leq 0$$

donc

$$(W - K)G(w - K) \leq 0 \quad P.P \quad sur \;\; \Omega,$$

Comme $tG(t) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ alors $w \leq\, < K$. On termine la démonstration en remplaçant w par $-w$. ■

Corollaire 5.9

Supposons que Ω *est de classe* C^1. *Soient* $f \in L_2(\Omega)$ *et* $w \in H^1(\Omega)$ *solution de* (5.2).

- *Si* $f \geq 0$ *sur* Γ *et* $f \geq 0$ *sur* Ω *alors* $u \geq$ *sur* Ω.
- $\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \max(\|u\|_{L_\infty(\Gamma)}, \|f\|_{L_\infty(\Omega)})$.
- *Si* $f = 0$ *sur* Ω *alors* $\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L_\infty(\Gamma)}$.
- *Si* $u = 0$ *sur* Γ *alors* $\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leq |f\|_{L_\infty(\Omega)}$.

Théorème 5.10

Soient $f \in L_2(\Omega)$ *et* $w \in H^1(\Omega)$ *solution de problème*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{5.3}$$

alors

$$\inf_\Omega f \leq w(x) \leq \sup_\Omega f \quad p.p. \quad x \in \Omega.$$

Soit $-div(A\nabla)$ où A une fammille mesurabe et borné de matrices unifrmément elliptiques.

Théorème 5.11

Supposons que G est $1-$régulier. Soient $f \in L_2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ et $w \in H^1(\Omega)$ l'unique solution faible du problème

$$-div(A(x)\nabla(x)) = f(x) \quad sur \quad \omega$$

$$u = g \quad sur \quad \Gamma$$

Si $g \geq 0$ p.p. sur Γ et $f \geq 0$ p.p. sur Ω alors $w \geq 0$ p.p. sur Ω.

Démonstration.

Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ croissante à dérrivée bornée telle que $G(t) = 0$ si et seultment si $t \geq 0$. Alors $G(w) \in H^1(\Omega)$, de plus $\gamma_0(G(w)) = G(\gamma_0(w)) = G(g)$, comme $g \geq 0$ alors $G(g) = 0$ donc $G \in H_0^1(\Omega)$.

En prennant $G(w)$ comme fonction test dans la formulation variationnelle de notre problème nouns obtenons

$$\int_\Omega A(x)\nabla w \cdot \nabla G(w) = \int_\Omega fG(w),$$

ce qi implique

$$\int_\Omega G'(w)(A(x)\nabla w) \cdot \nabla w \quad = \quad \int_\Omega fG(w). \tag{5.4}$$

On a

$$G'(w) \geq 0, \quad (A(x)\nabla w) \cdot \nabla u \geq \alpha|\nabla w|^2, \quad f \geq 0 \quad et \quad G(w) \geq 0,$$

donc les membres droit et gauche de (5.4) sont à signes différentes, ils doivent être nuls, donc $\nabla(G(u)) = 0$ c-à-dire $G(w) \in H_0^1(\Omega)$ et $\|T(w)\|_{H_0^1(\omega)} = 0$ donc

$G(w) = 0$ se qui implique $w \geq 0$. ■

Exercices du chapitre 5

Exercice 5.1

Soit $]a, b[$ *un intervalle borné de* $\mathbb{R}$*, on suppose que le problème*

$$-u'' + u = f$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta$$

admet une solution classique w *unique.*

Montrer que

$$\min(\alpha, \beta, \min_{]a,b[} f) \leq u(x) \leq \max(\alpha, \beta, \sup_{]a,b[} f), \forall x \in [a, b].$$

Solution.

Soient $K = \max(\alpha, \beta, \sup_{]a,b[} f)$ et $x_0 \in [a, b]$ le point où u atteint son maximum. Si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$ alors $u \leq K$ sur $[a, b]$. Supposons que $a < x_0 < b$, alors $u'(x) = 0$ et $u''(x) \leq 0$ donc $w(x_0) = w''(x_0) + f(x_0) \leq f(x_0) \leq K$.

Exercice 5.2

Soient $\Omega =]0,2[, \alpha > -\dfrac{1}{2}$, $f_\alpha(x) = x^\alpha$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$.

On considère les deux problèmes :

$$\begin{cases} -u'' + u = f_\alpha \\ u(0) = -1, u(2) = 1 \end{cases} \quad ....(1) \qquad\qquad \begin{cases} -u'' + u = f_{\alpha+1} \\ u'(0) = 1, u'(2) = 0 \end{cases} \quad ....(2)$$

On note $\widetilde{u}$ *(resp.* $\widetilde{v}$*) l'unique solution de* (1) *(resp.* (2)*) dans* $H^1(\Omega)$.

1. *Discuter suivant les valeurs de* α *l'appartenance de* f_α *à* $H^m(\Omega)$.
2. *Supposons que* $m - \dfrac{3}{2} < \alpha < m - \dfrac{1}{2}$. *En utilisant des résultats de cours, discuter les régularités de* $\widetilde{u}$ *et* $\widetilde{v}$.
3. *On prend* $\alpha = 1$. *Donner des encadrements de* $\widetilde{u}(x)$ *et* $\widetilde{v}(x)$ *pour tout* $x \in \overline{\Omega}$.

Solution.

1. On a $f_\alpha \in L_2(\Omega)$. $\dfrac{\partial^m f_\alpha}{\partial x^m}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-m+1)x^{\alpha-m}$, donc $f_\alpha \in H^m(\Omega)$ si et seulement si $-2(\alpha - m) < 1$ $\Big(i.e.\ \alpha > m - \dfrac{1}{2}\Big)$.
2. $m - \dfrac{3}{2} < \alpha < m - \dfrac{1}{2} \Rightarrow (m-1) + \dfrac{1}{2} < \alpha < m - \dfrac{1}{2}$ ce qui implique $f_\alpha \in H^{m-1}(\Omega)$ et $f_\alpha \notin H^m(\Omega)$ donc $\widetilde{u} \in H^{m+1}(\Omega)$.

   $m - \dfrac{3}{2} < \alpha < m - \dfrac{1}{2} \Rightarrow m - \dfrac{1}{2} < \alpha < (m+1) - \dfrac{1}{2}$ ce qui implique $f_{\alpha+1} \in H^m(\Omega)$ et $f_{\alpha+1} \notin H^{m+1}(\Omega)$ donc $\widetilde{v} \in H^{m+2}(\Omega)$.
3. $f_1(x) = x$. $min(-1, \inf_\Omega f_1) \leq \widetilde{u}(x) \leq sup(6, \max_\Omega f_1)$ donc $-1 \leq \widetilde{u}(x) \leq 2$.

   $f_2(x) = x^2$. $\inf_\Omega f_2 \leq \widetilde{v}(x) \leq \max_\Omega f_2 \Rightarrow 0 \leq \widetilde{v}(x) \leq 4$.

Exercice 5.3

Soit w l'unique solution de problème

$$\int_{-1}^{1} u'v'dx + \int_{-1}^{1} uvdx =< \delta_0, v >, \quad \forall v \in H_0^1(]-1,1[).$$

Montrer $w(x) \geq 0, \forall x \in [-1,1]$.

Solution.

On sait que w est l'unique solution faible du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -u'' + u = \delta_0 \quad sur \quad]-1,1[, \qquad (P) \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases}$$

On a $< \delta_0, v >= v(0) \geq 0, \forall v \in \mathcal{D}(]-1,1[)$ t.q. $v \geq 0$ donc $\delta_0 \geq 0$ sur $]-1,1[$. Comme $w = 0$ sur $\{-1,1\}$ alors $w \geq 0$ p.p. sur $]-1,1[$ (par le principe de maximum faible), d'autre part $w \in H^1(]-1,1[) \hookrightarrow C([-1,1])$ donc $w(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-1,1]$.

Exercice 5.4

Soient Ω un ouvert régulier, $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(L_\infty(\Omega))$ et telle que $A\xi.\xi \geq \alpha^2 |\xi|^2$. On cosidère le problème

$$(P) \qquad \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} u\Big) + u = f \quad sur \quad \Omega \\ u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

1) *A l'aide de l'approche variationnelle, montrer que (P) admet une solution faible unique w.*

2) *Supposons que $f \in L_\infty(\Omega)$, montrer que $w \in L_\infty(\Omega)$ et $\|w\|_{L_\infty} \leq \|f\|_{L_\infty(\Omega)}$.*

Solution.

1) Supposons qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ solution du problème, alors $u \in H_0^1(\Omega)$.

La ième composante de $A\nabla u$ est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(\Omega)$ donc $A\nabla u \in (L_2(\Omega))^n$, ce qui implique $-div(A\nabla u) + u = f$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Dautre par $\langle -div(A\nabla u) + u, v\rangle = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega uv dx$ donc la formulation vaitionnelle est : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\underbrace{\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega uv dx}_{B(u,v)} \; = \; \underbrace{\langle f, v\rangle}_{\ell(v)}, \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.5}$$

On montre facilement que (5.5) et (P) sont équivalante.

On a $|B(u,v)| \leq \||A\nabla u|\|_{L_2(\Omega)} \||\nabla v|\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)}$,

Comme

$$|A\nabla u|^2 = \sum_{j=1}^{n}\Big|\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big| \leq n \sup_{1\leq i,j\leq n} \|a_{i,j}\|_{L_\infty(\Omega)}|\nabla u|,$$

il vient

$$|B(u,v)| \leq C\|u|\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)},$$

donc B est continue sur $(H_0^1(\Omega))^2 = (H_0^1(\Omega))'$.

$\ell(v)$ est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ car $f \in H^{-1}(\Omega)$.

pour tout $u \in H_0^1(\Omega), B(u,u) = \displaystyle\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u dx + \int_\Omega u^2 dx \geq \max(1, \alpha^2)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$, donc B est coercive. D'aprés le théorème de lax-Limligram il existe $w \in H_0^1(\Omega)$ (unique) solution de (5.5).

2) On pose $\varphi = w + \|f\|_{L_\infty(\Omega)}$ donc $\varphi \in H^1(\Omega)$, de plus φ l'unique solution faible

du problème

$$\begin{cases} -div(A\nabla u) + u = f + \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \quad sur \quad \Omega \\ u = \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

On a $f + \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \geq 0$ sur Ω et $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} \geq 0$ donc $\varphi \geq 0$ p.p. sur Ω(principe de maximum) donc $w \geq -\|f\|_{L_\infty(\Omega)}$.

Maintenant, On pose $\psi = -w + \|f\|_{L_\infty(\Omega)}$ alors $\varphi \in H^1(\Omega)$ et $-\psi$ est l'unique solution faible du problème

$$\begin{cases} -div(A\nabla u) + u = -f + \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \quad sur \quad \Omega \\ u = \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

donc $-\psi \geq 0$ p.p sur Ω ce qui implique $w \leq \|f\|_{L_\infty(\Omega)}$.

Donc $w \in L_\infty(\Omega)$ et $\|w\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L_\infty(\Omega)}$.

Exercice 5.5

Soient $\lambda \neq 0, f \in H^{-1}(]0,1[)$ *et* $w \in H_0^1(]0,1[)$ *l'unique solution faible du problème*

$$-u'' + \lambda^2 u = f \quad sur \quad]0,1[,$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Monter les implications

$f \leq 0$ *p.p. sur* $]0,1[\Rightarrow w \leq 0$ *sur* $[0,1]$.

$f \in L_\infty(]0,1[) \Rightarrow \|w\|_{L_\infty(]0,1[)} \leq \frac{1}{\lambda^2}\|f\|_{L_\infty(]0,1[)}$.

Solution.

On a $w \in H_0^1(]0,1[)$ est

$$\int_0^1 w'v'dx + \lambda^2 \int_0^1 wvdx = \int_0^1 fvdx, \forall v \in H_0^1(]0,1[).$$

On prend w_+ comme fonction test

$$\int_0^1 w'w'_+dx + \lambda^2 \int_0^1 w_+vdx = \int_0^1 fw_+dx.$$

On a

$$\int_0^1 w'w'_+dx = \int_0^1 1_{w\geq 0}(w')^2dx \geq 0$$

et

$$\int_0^1 ww_+dx = \int_0^1 (w_+)^2dx \geq 0$$

Comme $\int_0^1 fw_+dx \leq 0$, il vient $\int_0^1 (w_+)^2dx = 0$, donc $w_+ = 0$ d'où $w \leq 0$ p.p. sur $]0,1[$, et comme $w \in H^1(]0,1[) \hookrightarrow C([0,1])$ alors $w \leq 0$ sur $[0,1]$.

On pose $K = \frac{1}{\lambda^2}\|f\|_{L_\infty(]0,1[)}$ et on prend $(w-K)_+ \in H_0^1(]0,1[)$ comme fonction test, il vient

$$\int_0^1 w'(w-K)'_+dx + \lambda^2 \int_0^1 (w-K)_+wdx = \int_0^1 f(w-K)_+dx.$$

On a $\int_0^1 w'(w-K)'_+dx = 1_{u\geq M}w'^2dx \geq 0$, donc

$$\int_0^1 f(w-K)_+dx \geq \lambda^2 \int_0^1 (w-K)_+wdx = \lambda^2 \int_0^1 (w-K)_+(w-K)dx + \lambda^2 \int_0^1 K(w-K)_+wdx.$$

ce qui implique

$$\int_0^1 f(w-K)_+dx \geq \lambda^2 \int_0^1 ((w-K)_+)^2dx + \lambda^2 \int_0^1 K(w-K)_+wdx,$$

ce qui nous donne

$$\int_0^1 ((w-K)_+)^2dx \leq \frac{1}{\lambda^2} \int_0^1 (f-\lambda^2K)(w-K)_+wdx \leq 0,$$

donc $(w-K)_+ = 0$ c-à-dire $w \leq K$.

En remarquant que $-w \in H_0^1(]0,1[)$ est l'unique solution faible du problème

$$\begin{cases} -u'' + \lambda^2 u = -f \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

il vient $-w \leq K$. Donc $|w| \leq K$, ce qui donne l'estimation cherchée.

Exercice 5.6

On admet que :

$h \in H^1(]0,1[) \Rightarrow \left[(h-k)_+ \in H^1(]0,1[)\right.$ ***et*** $(h-k)'_+ = h'\mathbf{1}_{\{u>k\}}$ ***pour tout*** $\left.k > 0\right]$**.**

Soient p, q *et* f *trois fonctions appartenant à* $L_\infty(]0,1[)$ *telles que* $p(x), q(x) \geq \alpha > 0$ *pour presque tout* $x \in]0,1[$.

1) *On considère le prolème*

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + u(x) = f(x) \quad sur[0,1] \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

a)Etablir une formulation variationnelle de problème (5.6) *et montrer qui'il admet une solution faible unique* w.

b)Montrer que : ($f \leq 0$ *p.p. sur* $]0,1[) \Rightarrow (w \leq 0$ *sur* $]0,1[$*).*

c) Montrer que $\|w\|_{L_\infty(]0,1[)}\| \leq \|f\|_{L_\infty(]0,1[)}\|$.

2) *On pose* $S(v) = \displaystyle\int_0^1 (p+q)w'v'dx + \int_0^1 wvdx$ *(où* w *est l'unique solution faible de* (5.6)*). Montrer que*

a)$S \in (H^1(]0,1[))'$.

b) Il existe un seule $u \in H^1(]0,1[)$ *telle que*

$$\int_0^1 qu'v'dx + \int_0^1 uv = \int_0^1 (p+q)w'v'dx + \int_0^1 wvdx, \qquad \forall v \in H^1(]0,1[). \tag{5.7}$$

3) *On suppose qu'il existe un réel* $\eta > 0$ *tel que* $q = \eta p$.

a) Montrer qui'il existe une fonction g *qui depend de* f, w *et* η, *et une fonction* φ *strictement positive sur* $]0,1[$ *qui dépend de* p *et* η *telle que*

$$\int_0^1 \varphi u'v'dx + \frac{1}{1+\eta}\int_0^1 uv = \int_0^1 gvdx, \qquad \forall v \in H^1(]0,1[). \tag{5.8}$$

b) Montrer que : $\|u\|_{L_\infty(]0,1[)} \leq (1+2\eta)\|f\|_{L_\infty(]0,1[)}$.

Solution.

1) *a)* Multiplions l'équation $-(p(x)u')' + u(x) = f(x)$ par une fonction $v \in H^1(]0,1[)$ et intégrons par partie, nous obtenons la formulation variationnelle

$$\underbrace{\int_0^1 pu'v'dx + \int_0^1 uvdx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 fvdx}_{\ell(v)} \qquad \forall v \in H^1(]0,1[), \tag{fv}$$

Pour tout $u, v \in H^1(]0,1[)$, on a

$|a(u,v)| \leq \|p\|_{L_\infty(]0,1)}\|u'\|_{L_2(]0,1[}\|v'\|_{L_2(]0,1[}+\|u\|_{L_2(]0,1[}\|v\|_{L_2(]0,1[}| \leq \|p\|_{L_\infty(]0,1)}|\|u\|_{H^1(]0,1[}\|v\|_{H^1(]0,1[}$.

$a(u,u) \geq \alpha\|u'\|^2_{L_2(]0,1[)} + \|u\|^2_{L_2(]0,1[)} \geq \max(\alpha,1)\|u\|^2_{H^1(]0,1[)}$.

$\|\ell(v)\| \leq \|f\|_{L_2(]0,1[}\|v\|_{L_2(]0,1[} \leq C\|v\|_{H^1(]0,1[}$ (rappellons que $L_\infty(]0,1[) \subseteq L_2(]0,1[)$).

D'après le théorème de Lax-Miligram il existe $w \in H^1(]0,1[)$ solution de (fv), donc (2) admet un solution faible unique $w \in H^1(]0,1()$.

b) En prennant $w_+ \in H^1(]0,1[)$ comme fonction test dans (fv) on obtient

$$\underbrace{\int_0^1 (w')^2 p 1_{\{w\geq 0\}} dx + \int_0^1 w_+^2 dx}_{\geq 0 (car\ p>0\ p.p.\ sur\ ]0,1[)} = \underbrace{\int_0^1 f w_+ dx,}_{\leq 0}$$

donc $\displaystyle\int_0^1 w_+^2 dx = 0$ ce qui implique $w_+ = 0$ p.p. sur $]0,1[$ d'où $w \leq 0$ sur $[0,1]$ (car $w \in H^1(]0,1[) \hookrightarrow C([0,1])$.

c)Soit $k = \|f\|_{L_\infty(]0,1()}$. On prend $(u-k)_+ \in H^1(]0,1[)$ comme fonction test il vient.

$$\underbrace{\int_0^1 (w')^2 q 1_{\{w>k\}} dx + \int_0^1 (w-k)_+^2 dx}_{\geq 0} = \underbrace{\int_0^1 (f-k)(w-k)_+}_{\leq 0} dx$$

$\displaystyle\int_0^1 (w-k)_+^2 dx_{\geq 0} = 0$ donc $(w-k)_+ = 0$, d'où $w \leq \|f\|_{L_\infty(]0,1[)}$.
la fonction $-w$ vérifie

$$\int_0^1 p(-w)'v'dx + \int_0^1 (-w)vdx = \int_0^1 (-f)vdx \qquad \forall v \in H^1(]0,1[),$$

donc $-w \leq \|-f\|_{L_\infty(]0,1[)}$, ce qui donc $-\|f\|_{L_\infty(]0,1[)} \leq w \leq \|f\|_{L_\infty(]0,1[)}$, d'où le résultat voulu.

2) *a*) on a $|S(v)| \leq \max(\|p+q\|_{L_\infty(]0,1[)}\|w\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)} \leq C\|v\|_{H^1(]0,1[)}, \forall v \in H^1(]0,1[)$. donc $S \in (H^1(]0,1))'$.

b) On a vu dans les question 1)*a*) et 2)*a*) que $\displaystyle\int_0^1 qu'v'dx + \int_0^1 uvdx$ définit une forme bilinéaire continue sur $(H^1(]0,1[)^2$ et coercive, et S est une forme linéaire continue sur $H^1(]0,1[)$ donc par le théorème de Lax-Miligram, il exite $u \in H^1(]0,1)$ unique vérifiant (3).

3)*a*) u solution de (3) et $q = \eta p$ impliquent

$$\int_0^1 qu'v'dx + \int_0^1 uv = \int_0^1 (1+\eta)pw'v'dx + \int_0^1 wvdx, \qquad \forall v \in H^1(]0,1[),$$

mais w est solution de (2), donc

$$\int_0^1 \frac{\eta p}{1+\eta} u'v'dx + \frac{1}{1+\eta}\int_0^1 uv = \int_0^1 (f - \frac{\eta}{1+\eta} w)vdx, \qquad \forall v \in H^1(]0,1[),$$

d'où l'expression cherchée, avec $\varphi = \dfrac{\eta p}{1+\eta}$ et $g = f - \dfrac{\eta}{1+\eta} w$.

b) Soit $k = (1+\eta)\|g\|_{L_\infty}$, on prend $(u-k)_+ \in H^1(]0,1[)$ comme fonction test dans (4) il vient

$$\underbrace{\int_0^1 (u')^2 \varphi 1_{\{u>k\}} dx + \frac{1}{1+\eta}\int_0^1 ((u-k)_+)^2}_{\geq 0} = \underbrace{\int_0^1 (g - \frac{k}{1+\eta})(u-k)_+ dx,}_{\leq 0}$$

donc $(u-k)_+ = 0$, ce qui implique $u \leq k = (1+\eta)\|g\|_{L_\infty(]0,1[)}$.

Remarquons que $-u$ vérifie

$$\int_0^1 \frac{\eta p}{1+\eta}(-u)'v'dx + \frac{1}{1+\eta}\int_0^1 (-)uv = \int_0^1 (-g)vdx, \qquad \forall v \in H^1(]0,1[),$$

donc $-u \leq (1+\eta\|-g\|_{L_\infty(]0,1[)})$, d'où $(1+\eta)\|g\|_{L_\infty(]0,1[)}) \leq u \leq (1+\eta)\|g\|_{L_\infty(]0,1[)})$, donc

$$\|u\| \leq (1+\eta)\|g\|_{L_\infty(]0,1[)} = \|(1+\eta)f - \eta w\|_{L_\infty(]0,1[)},$$

comme $\|w\|_{L_\infty(]0,1[)} \leq \|f\|_{L_\infty(]0,1[)}$ (question 1)*c*)) alors

$$\|u\| \leq (1+\eta)\|g\|_{L_\infty(]0,1[)} \leq \|(1+\eta)\|f\|_{L_\infty(]0,1[)} + \eta\|w\|_{L_\infty(]0,1[)} \leq (1+2\eta)\|w\|_{L_\infty(]0,1[)}.$$

Exercice 5.7

On considère l'application : $a(u,v) = \displaystyle\int_0^1 u'v'dx + \alpha\int_0^1 u'vdx + \int_0^1 uvdx, \forall u,v \in H^1(]0,1[)$, *où* $-2 < \alpha \leq 0$.

1) *a*) *Montrer que :* $\quad 2\displaystyle\int_0^1 u'udx \leq \|u\|^2_{H^1(]0,1[)}, \forall u \in H^1(]0,1[)$.

b) En déduire que $a(\cdot,\cdot)$ est corecive.

2) Soit $f \in L_2(]0,1[)$. Justifier l'existance et l'unicité d'un $w \in H^1(]0,1[)$ tel que

$$a(w,v) = \int_0^1 fv dx, \forall v \in H^1(]0,1[).$$

3) a) Montrer que $-w'' + \alpha w' + w = f$ au sence de distribution.

b) En déduire que $w \in H^2(]0,1[)$.

4) Supposons que $\alpha = 0$ et $f \in L_\infty(]0,1[)$, montrer que $\|w\|_{L_\infty(]0,1[)} \leq \|f\|_{L_\infty(]0,1[)}$.

Solution.

1) Pour tout $u \in H^1(]0,1[)$, on a

$$2\int_0^1 u'u dx \leq 2\|u\|_{L_2(]0,1[)}\|u'\|_{L_2(]0,1[)} \leq \|u\|^2_{L_2(]0,1[)} + \|u'\|^2_{L_2(]0,1[)} = \|u\|^2_{H^1(]0,1[)}.$$

2)$a(u,u) = \|u\|^2_{H^1(]0,1[)} + \alpha \int_0^1 u'u dx \geq (1+\alpha/2)\|u\|^2_{H^1(]0,1[)}$, donc $a(\cdot,\cdot)$ est $(1+\alpha/2)$-coercive.

3) Pour tous $u, v \in H^1(]0,1[)$ on a :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \|u'\|_{L_2(]0,1[)}\|v'\|_{L_2(]0,1[)} + |\alpha|\|u'\|_{L_2(]0,1[)}\|v\|_{L_2(]0,1[)} + \|u\|_{L_2(]0,1[)}\|v\|_{L_2(]0,1[)} \\ &\leq \Big(\|u'\|_{L_2(]0,1[)} + |\alpha|\|u'\|_{L_2(]0,1[)} + \|u\|_{L_2(]0,1[)}\Big)\|v\|_{H^1(]0,1[)} \\ &\leq \max(|\alpha|,1)\|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}. \end{aligned}$$

donc $a(\cdot,\cdot)$ est continue sur $(H^1(]0,1[))^2$.

On pose $\ell(v) = \int_0^1 fv dx$, alors $|\ell(v)| \leq \|f\|_{L_2(0,1)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}$, donc ℓ est continue sur $H^1(]0,1[)$.

D'après le théorème de Lax-Miligram il existe $w \in H^1(]0,1[)$ unique telle que

$$a(w,v) = \int_0^1 fvdx, \forall v \in H^1(]0,1[).$$

3) *a*) On a : $a(w,v) = \int_0^1 fvdx, \forall v \in \mathcal{D}(]0,1[)$, par intégration par partie

$$\langle -w'' + \alpha w + w - f, v\rangle = 0, \forall v \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

b) On a : $\langle -w'' + \alpha w + w - f, v\rangle = 0, \forall v \in \mathcal{D}(]0,1[)$, par densité de $\mathcal{D}(]0,1[)$ dans $L_2(]0,1[)$ on trouve $-w''+\alpha w+w-f = 0$ p. p. donc $w'' = +\alpha w+w-f \in L_2(]0,1[)$, donc $w \in H^2(]0,1[)$.

4) On pose $k_f = \|f\|_{L_\infty(]0,1[)}$ et on prend $(w-k)_+ \in H^1(]0,1[)$ comme fonction test, alors

$$\underbrace{\int_0^1 (w')^2 1_{\{w\geq k\}}dx + \int_0^1 ((w-k)_+)^2 dx}_{\geq 0} = \underbrace{\int_0^1 (f-k_f)w_+ dx}_{\leq 0},$$

donc $\int_0^1 ((w-k_f)_+)^2 dx$ ce qui done $w \leq k_f$ p.p. sur $]0,1[$.
D'autre part, $-w$ est solution du problème $a(u,v) = \int_0^1 -fvdx$, donc $-w \leq k_{-f} = k_f$ p.p. sur $]0,1[$, ce qui donne $-k_f \leq w \leq k_f$ p.p. sur $]0,1[$ donc $\|w\|_{L_\infty(]0,1[)} \leq k_f = \|f\|_{L_\infty(]0,1[)}$.

Exercice 5.8

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et de frontière $\Gamma, f \in L_2(\Omega)$ et λ un réel strictement positif ($\lambda > 0$). On considère le problème : trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \lambda \int_\Omega uvdx = \int_\Omega fvdx, \forall v \in H^1(\Omega) \qquad (1).$$

1. *Justifier l'existance et l'unicité d'un $w \in H^1(\Omega)$ solution de (1).*
2. *Supposons que $f \in H^3(\Omega)$, montrer que $w \in H^5(\Omega)$.*
3. *Trouver un problème aux limites (P_2) telle que w est une solution faible de (P_2).*
4. *Suopposons que $f \in L_\infty(\Omega)$, montrer que $w \in L_\infty(\Omega)$ et*

$$\|w\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Solution.

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \lambda \int_\Omega uv dx}_{:=b(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega fv dx}_{:=T(v)}, \forall v \in H^1(\Omega), \tag{1}$$

1. $b(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire sur $H^1(\Omega)$, de plus, pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$ on a

$$|b(u,v) \leq \||\nabla u|\|_{L_2(\Omega)}\||\nabla v||_{L_2(\Omega)} + \lambda\|u\|_{L_2(\Omega)}\|v|_{L_2(\Omega)} \leq \max(\lambda,1)\|u\|_{H^1(\Omega)}\||v||_{H^1(\Omega)},$$

donc $b(\cdot,\cdot))$ est continue sur $H^1(\Omega)$. D'autre part, pour tout $u \in H^1(\Omega)$

$$|b(u,u)| = \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \lambda\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \geq \min(\lambda,1)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|^2,$$

$b(\cdot,\cdot))$ est corecive sur $H^1(\Omega)$.

T est une forme linéaire, de plus, pour tout $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$|T(v)| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)},$$

donc T est continue sur $H^1(\Omega)$.

D'après le théorème de Lax-Miligram $\exists! w \in H^1(\Omega)$ solution de (1).

2. w est une sotlution de (1), en particulier

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donc

$$\langle -\Delta w, v\rangle + \lambda \langle u, v\rangle = \langle f, v\rangle, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donc $-\Delta w + \lambda w = f$ p.p. sur Ω.

$\Delta w = \Big(\lambda \underbrace{w}_{\in H^1(\Omega)} - \underbrace{f}_{\in H^3(\Omega)}\Big) \in H^1(\Omega)$, donc $w \in H^3(\Omega)$

$\Delta w = \Big(\lambda \underbrace{w}_{\in H^3(\Omega)} - \underbrace{f}_{\in H^3(\Omega)}\Big) \in H^3(\Omega)$, donc $w \in H^5(\Omega)$.

3. En appliquant la formule de Green dans le première intégralle de (1) on trouve

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v ds + \lambda \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in H^1(\Omega),$$

et comme $-\Delta w + \lambda w = f$ p.p. sur Ω, il vient $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial \nu} v ds = 0, \forall v \in H^{1/2}(\Omega)$,

donc $\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ sur Γ(par densité de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $L_2(\Gamma)$).

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & : \text{sur} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

4. Soit $K = \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L_\infty(\Omega)}$, alors $(w-K)_+ \in H^1(\Omega)$ et $\nabla(w-K)_+ = 1_{\{u \geq K\}} \nabla w$.

En prennant $v = (w-K)_+$ dans (1), il vient

$$\underbrace{\int_{\Omega} |\nabla w|^2 1_{\{u\geq K\}} dx + \lambda \int_{\Omega} (w-K)(w-K)_+ dx}_{\geq 0} = \underbrace{\int_{\Omega} (f - \lambda K)(w-K)_+ dx}_{\leq 0},$$

donc $(w-K)_+ = 0$, ce qui implique $w \leq K$ p. p. sur Ω.

En remrquant que $-w$ est l'unique solution de (1) avec second membre $-f$ on trouve $-K \leq w$ p.p. sur Ω, donc $w \in L_\infty(\Omega)$ et $\|w\|_{L_\infty(\Omega)} \leq K$.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces.* Academic Press, 1978.

[2] G. Allaire, F. Alouges, *Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles.* Polycopié du cours MAP 431, École Polytechnique, année 2015–2016.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théeorie et applications.* Dunod, Paris, 1999.

[4] J.M. Bony, *Cours d'analyse : théeorie des distributions et analyse de Fourier.* Les Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2001.

[5] M. Chipot, *Elliptic equations : An introductory course.* Birkhåuser Advanced texts, 1979.

[6] D. Gilbarg, Neil S., *Elliptic partial differential equations of second order.* Les Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2001.

[7] D. Gilbarg, Neil S., *Elliptic partial differential equations of second order.* Les Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2001.

[8] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action From Modelling to Theory.* Springer-Verlag Italia, Milano, 2008.