وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات والإعلام الي
السنة الثالثة رياضيات
2025/2024

يوم الاثنين: 13 رجب 1446 هـ
الموافق: 13 جانفي 2025م

امتحان في مادة المعادلات التفاضلية

التمرين الأول: [10 نقاط]

لنضع $f(t,y) = t\sqrt{t^2+y^2}$ و $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$.

1. عرف كون f لبشيزية محليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على $I \times \Omega$.
2. أدرس وجود الحل الأعظمي الوحيد لمسألة كوشي (I) التالية: $\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

(لاحظ أن: $\frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{t^2+y^2}}$)

3. برهن أن الحل الأعظمي $(y, J =]\alpha, \beta[)$ لمسألة كوشي (I) دالة زوجية على J، مع إيجاد J.
4. أثبت أن y متزايدة تماما على $]0, \beta[$.
5. برهن أن f لبشيزية كليا بالنسبة لـ y على $\mathbb{R}^2$، مع إعطاء التعريف.
6. برهن أن (y, J) حل كلي وحيد لمسألة كوشي (I)، مع إيجاد J.

التمرين الثاني: [10 نقاط]

1. أكتب الجملة التفاضلية التالية: $\begin{cases} \dot{x}(t) = x - z + w \\ \dot{y}(t) = y + z \\ \dot{z}(t) = z \\ \dot{w}(t) = z \end{cases}$ على الشكل: $\begin{cases} \dot{Y}(t) = AY \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$.

2. أوجد الحل العام للجملة.

يمكن استعمال ما يلي:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

بالتوفيق

Scanné avec CamScanner

تصحيح امتحان الفصل الأول في مادة التحليل يوم الاثنين 13 رجب 1446 هـ الموافق لـ 13 جانفي 2025 م

حل تمرين 01 [10 نقاط]

نضع $f(t,y)=t\sqrt{t^2+y^2}$

و $I\times\Omega=\mathbb{R}^2$

1) تعريف كون f لبتزية محليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على $I\times\Omega$ أي:

$\forall (t_0,y_0)\in I\times\Omega,\ \exists r>0, T>0$

$\forall t\in[t_0-T, t_0+T], \forall y_1,y_2\in[y_0-r, y_0+r]$

$\exists k>0:$

$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\le k|y_1-y_2|$

2) دراسة وجود وحدانية الحل العظمي الوحيد لمسألة كوشي (I) التالية:

$$(I)\begin{cases} y'=t\sqrt{t^2+y^2} \\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

f مستمرة على $\mathbb{R}^2$؟

نعم

$D_f=\mathbb{R}^2$

ومنه f مستمرة على $\mathbb{R}^2$.

f لبتزية محليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على $\mathbb{R}^2$؟ لدينا:

$\forall (t_0,y_0)\in\mathbb{R}^2,\ \exists r>0, \exists T>0$

$\forall t\in[t_0-T,t_0+T], \forall y_1,y_2\in[y_0-r,y_0+r]$

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|=\left|t\sqrt{t^2+y_1^2}-t\sqrt{t^2+y_2^2}\right|$$

$$=|t|\frac{\left|\sqrt{t^2+y_1^2}-\sqrt{t^2+y_2^2}\right|\left(\sqrt{t^2+y_1^2}+\sqrt{t^2+y_2^2}\right)}{\sqrt{t^2+y_1^2}+\sqrt{t^2+y_2^2}}$$

$$=\frac{|t||\cancel{t^2}+y_1^2-\cancel{t^2}-y_2^2|}{\sqrt{t^2+y_1^2}+\sqrt{t^2+y_2^2}}$$

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|=\frac{|t||y_1+y_2||y_1-y_2|}{\sqrt{t^2+y_1^2}+\sqrt{t^2+y_2^2}},\ \forall t\neq 0$$

من جهة أخرى لدينا

$y_1^2\le t^2+y_1^2\Rightarrow |y_1|\le\sqrt{t^2+y_1^2}$

$y_2^2\le t^2+y_2^2\Rightarrow |y_2|\le\sqrt{t^2+y_2^2}$

$$|y_1+y_2|\le|y_1|+|y_2|\le\sqrt{t^2+y_1^2}+\sqrt{t^2+y_2^2}$$

$$\Rightarrow\frac{|y_1+y_2|}{\sqrt{t^2+y_1^2}+\sqrt{t^2+y_2^2}}\le 1.$$

بضرب المتراجحة في $|t|$ نجد

$$\frac{|t||y_1+y_2|}{\sqrt{t^2+y_1^2}+\sqrt{t^2+y_2^2}}\le|t|=|t-t_0|+|t_0|$$

$$\le T_0+|t_0|$$

$$\left[\forall t\in[t_0-T,t_0+T]\Rightarrow|t-t_0|\le T_0\right].$$

بضرب المتراجحة الأخيرة في $|y_1-y_2|$ نجد:

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|=\frac{|t||y_1+y_2||y_1-y_2|}{\sqrt{t^2+y_1^2}+\sqrt{t^2+y_2^2}}$$

$$\le[T_0+|t_0|]|y_1-y_2|,\ \forall t\neq 0$$

وتبقى صحيحة من أجل $t=0$ حيث:

$$|f(0,y_1)-f(0,y_2)|\le|y_1-y_2|(|t_0|+T_0)$$

نتحصل في الأخير:

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\le[T_0+|t_0|]|y_1-y_2|$$

يكفي أخذ $k=T_0+|t_0|>0$.

ومنه f لبتزية محليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على $\mathbb{R}^2$.

ومنه حسب نظرية كوشي - ليبشتز من أجل $(t_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ مسألة كوشي $(I)\begin{cases}y'=f(t,y)\\ y(0)=y_0\end{cases}$ تقبل حل أعظمي وحيد (y,J).

3) البرهان أن $J=]\alpha,\beta[$ المجال الأعظمي لمسألة كوشي (I) أنه دالة زوجية أي $J=-J$؟

لابد أن نبرهن أن (1) $\forall t\in J$, $y(t)=y(-t)$ ؟

من أجل ذلك نعرف الدالة z كما يلي:

تابع لتصحيح إمتحان الحادي عشر الثانوي ليوم الإثنين 13 رجب 1446 الموافق لـ 13 جانفي 2025

$\mathbb{R}$ f y t 5) تعريف f لبشزيته كليا بالنسبة لـ

$\forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \Omega, \exists k(t) \geq 0$

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq k(t)|y_1 - y_2|$

* البرهان أن f لبشزيته كليا بالنسبة لـ y على $\mathbb{R}^2$

$\forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \Omega$

من السؤال (2) لدينا

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = \frac{|t||y_1+y_2||y_1-y_2|}{\sqrt{t^2+y_1^2}+\sqrt{t^2+y_2^2}}, \forall t \neq 0$$

وبتقسيم الطرفين لدينا

$$\frac{|y_1+y_2||t|}{\sqrt{t^2+y_1^2}+\sqrt{t^2+y_2^2}} \leq |t|, \forall t \neq 0$$

نضرب المتراجحة الأخيرة في $|y_1 - y_2|$ فنجد:

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq |t||y_1 - y_2|, \forall t \neq 0$

يمكن أخذ $k(t) = |t|$ و $k(0) = 0$.

وتبقى المتراجحة الأخيرة صحيحة من أجل $t = 0$.

$|f(0,y_1) - f(0,y_2)| \leq |0||y_1 - y_2|$.

ومنه f لبشزيته كليا بالنسبة لـ y على $\mathbb{R}^2$.

إذن مسألة كوشي (I) تقبل حل وحيد

و $J = \mathbb{R}$.

حل التمرين 2: [05 نقاط]

لدينا الجملة التفاضلية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x - z + w \\ \dot{y}(t) = y + z \\ \dot{z}(t) = z \\ \dot{w}(t) = z \end{cases}$$

1) كتابتها على الشكل $\begin{cases} \dot{Y}(t) = AY \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$g: -J \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto g(t) = y(-t)$

ولنبرهن أن $(g, -J)$ حل لمسألة كوشي (I):

(1) $(t, g(t)) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in -J$

(2) $0 \in J \Rightarrow 0 \in -J, g(0) = y(0) = y_0$

(3) لنبرهن: $\forall t \in -J: g'(t) = f(t, g(t))$?

$$g'(t) = \frac{d}{dt}[y(-t)] = -\dot{y}(-t)$$

$$= -f(-t, y(-t))$$

$$= -(-t)\sqrt{(-t)^2 + y^2(-t)}$$

$$= t\sqrt{t^2 + g^2(t)} = f(t, g(t))$$

ومنه $(g, -J)$ حل لمسألة كوشي (I)

ومنه (y, J) موسع وحيد لـ $(g, -J)$

إذن

$$\begin{cases} -J \subset J \longrightarrow (1) \\ y/_{-J} = g \longrightarrow (2) \end{cases}$$

$J =]\alpha, \beta[\Rightarrow -J =]-\beta, -\alpha[$.

$(1) \Rightarrow]-\beta, -\alpha[\subset]\alpha, \beta[$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \leq -\beta \\ -\alpha \leq \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \leq -\beta \\ \alpha \geq -\beta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = -\beta}$$

$J =]-\beta, \beta[= -J$

(2) $y(t) = g(t) = y(-t), \forall t \in -J = J$

ومنه (y, J) دالة زوجية.

4) البرهان أن y متزايدة على $]0, \beta[$

$\forall t \in]0, \beta[$,

$\dot{y}(t) = t\sqrt{t^2 + y^2} > 0 \Rightarrow$ y متزايدة تماما على $]0, \beta[$

Scanné avec CamScanner

03

تابع لتصحيح امتحان الماجستير في الرياضيات التطبيقية
الموافق لـ 13 جانفي 2025 / 13 رجب 1446

إيجاد الحل العام للمعادلة:

لنضع $R(t,t_0)$ المواة الكالة للمعادلة

$$Y(t) = R(t,t_0)\,Y_0$$

بما أن $A \in M_4(\mathbb{R})$ مصفوفة ثابتة فإن

$$R(t,t_0) = e^{(t-t_0)A}$$

حسب $e^{\alpha A}$ حيث $(\alpha = t-t_0)$.

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^3\lambda$$

فضاء الأشعة الذاتية: $\lambda_1 = 1$. $n_1 = 3$

$$E_1 = \left\langle \left\{ e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \right\rangle .$$

فضاء الأشعة الذاتية الجديدة

$$E_1^3 = \left\langle \left\{ e_1, e_2, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

فضاء أشعة ذاتية . $n_2 = 1$ و $\lambda_2 = 0$

$$E_0 = \left\langle \left\{ e_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle .$$

$$Q = (e_1\ e_2\ e_3\ e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

حساب λ, β :

$$A = QDQ^{-1}$$

$$AQ = QD$$

$$(Ae_1\ Ae_2\ Ae_3\ Ae_4) = (e_1\ e_2\ \beta e_1 + \lambda e_2 + e_3\ 0)$$

بالمطابقة نجد: $\beta e_1 + \lambda e_2 + e_3 = Ae_3$

$$\begin{pmatrix}\beta\\\lambda\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\beta = 0}\ \boxed{\lambda = 1}$$

طريقة اختزال جوردان $(m_3 = 2)$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & J(1,2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

لنضع $P = (u_1\ u_2\ u_3\ u_4)$.

$$A = PJP^{-1} \Rightarrow AP = JP$$

$$(Au_1\ Au_2\ Au_3\ Au_4) = (u_1\ u_2\ u_2+u_3\ 0)$$

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} Au_1 = u_1 \Rightarrow u_1 \in E_1 & \boxed{u_1 = e_1} \\ Au_2 = u_2 \Rightarrow u_2 \in E_1 & \boxed{u_2 = e_2} \\ Au_3 = u_2 + u_3 \quad (1) & \\ Au_4 = 0,\ u_4 \in E_0 \Rightarrow & \boxed{u_4 = e_4} \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow (A - I_4)u_3 = e_2 . \quad u_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x_4 = x_3 = 1}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لنضع $x_1 = x_2 = 0$ نجد

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3 : \quad P = Q . \ , \ J = D .$$

$$A = PJP^{-1} \Rightarrow \alpha A = P\,\alpha J\,P^{-1}$$

$$e^{\alpha A} = P\,e^{\alpha J}\,P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha J(1,2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$J(1,2) = I_2 + N ;$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N^2 = 0 \Rightarrow N^k = 0,\ \forall k \geq 2$$

$$e^{\alpha J(1,2)} = e^{\alpha I_2 + \alpha N} = e^{\alpha} e^{N} = e^{\alpha}(I_2 + N)$$

$$e^{\alpha J(1,2)} = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & \alpha e^{\alpha} \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$e^{\alpha A} = P \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha} & \alpha e^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Scanné avec CamScanner