UNIVERSITÉ LARBI BEN M'HIDI-OUM EL BOUAGHI

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématique et Informatique

3ième année licence informatique (SI)

Contrôle de remplacement **Probabilité & Statistique** **Le 27/01/2025**

Nom :..**Prénom :**................................**Groupe :**.......

Exercice 01.(10 points) (Variable aléatoire discrète et continue)

1. Dans un lot de 100 pièces fabriquées à l'aide d'une tour, 10 sont inutilisables. Pour contrôler la qualité, on extrait au hasard, 5 pièces du lot. Soit X la v.a qui prend comme valeur **le nombre** de pièces inutilisable parmi les 5 pièces examinées.
   Déterminer la loi de la v.a X et donner sa formule de la loi de probabilité. (01 pt)
   ....
   ....
   ....
   Donner la probabilité qu'on trouve au moins 2 pièces inutilisables. (01 pt)
   ....
   ....

2. La durée de vie en années d'un ordinateur est une variable aléatoire continue X suivant la loi exponentielle de paramètre λ. (03 pts)
   Sachant que $P(X > 10) = 0.286$, déterminer la valeur de λ.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   Calculer la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
   ....

3. Dans un système de communication sans fil, un signal est transmis plusieurs fois pour renforcer la fiabilité de la tranmission. Chaque fois qu'un signal est transmis, il est affecté par un bruit gaussien. Soit X_i la v.a qui représente "le bruit i ajouté au signal lors de chaque tranmission", $i = 1, 2, 3$. On suppose que $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
   Le bruit total S est la somme de trois bruits. Trouver la fonction caractéristique de S.
   ....
   ....

En déduire la loi de S. Interpréter ce résultat. (01 pt)

Trouver s telle que $P(S < s) = 0.3$.(01)

Remarque : la fonction caractéristique de la loi normale (μ, σ^2) **est** $\varphi_X(t) = e^{it\mu}\, e^{-\frac{t^2\,\sigma^2}{2}}$**.**

4. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Résoudre le système d'équations suivant et déterminer μ et σ^2 :

$$\begin{cases} P(X < 82) = 0.184 \\ P(X > 130) = 0.0668 \end{cases}$$

Remarque : On sait que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Leftrightarrow \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$**.**

Exercice 02.(05 points) (vecteur aléatoire gaussien)

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées réduites.

1. Déterminer la loi de probabilité du vecteur $X = (X_1, X_2, X_3)^t$. Justifier. (01.5 pts)

2. Quelle est la loi du vecteur $(X_1, X_3)^t$? (0.5 pt)

3. On définit la variable Z comme suite : $Z = (Z_1 \;\; Z_2)^t$, telles que :
$Z_1 = \dfrac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}$ et $Z_2 = \dfrac{X_1 - X_3}{\sqrt{2}}$. Déterminer la loi de Z ? (02.5 pts)

4. Que peut-on dire de l'indépendance de Z_1 et Z_2 ? (0.5 pt)

Exercice 03.(05 points) (Estimation paramétrique) Une entreprise informatique surveille les temps de réponse (en millisecondes) de son serveur pour les requêtes d'utilisateur. On suppose que le temps de réponse suivent une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Sur un échantillon de 25 requêtes, On a trouvé le tableau suivant :

Valeurs x_i	100	200	250	400
L'effectif de valeurs	6	12	4	3

1. Déterminer : (01 pt)
   L'échantillon étudié : La taille de l'échantillon :
   La variable X étudiée :
2. Donner l'estimation $\widehat{\mu}$ du maximum de vraisemblance de la moyenne μ.
3. Donner l'estimation $\widehat{\sigma^2}$ du maximum de vraisemblance de la variance σ^2.
4. Donner un intervalle de confiance du maximum de vraisemblance de l'espérance μ au risque $\alpha = 0.1$.

Remarque : Si $\alpha = 0.1$ **alors** $\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) = 1.65$**.**

Si $\alpha = 0.1$ **et** $n = 25$ **alors** $T_{n-1}^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) = 1.7109$**.**

Table 2.

La table donne la valeur de x telle que

$$P(Z \leq x) = p \quad \text{où} \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ et } p \in [0.5, 0.999].$$

p	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,0071	0,008	0,009
0,50	0,0000	0,0025	0,0050	0,0075	0,0100	0,0125	0,0150	0,0175	0,0201	0,0226
0,51	0,0251	0,0276	0,0301	0,0326	0,0351	0,0376	0,0401	0,0426	0,0451	0,0476
0,52	0,0501	0,0527	0,0552	0,0577	0,0602	0,0627	0,0652	0,0677	0,0702	0,0728
0,53	0,0753	0,0778	0,0803	0,0828	0,0853	0,0878	0,0904	0,0929	0,0954	0,0979
0,54	0,1004	0,1029	0,1055	0,1080	0,1105	0,1130	0,1156	0,1181	0,1206	0,1231
0,55	0,1257	0,1282	0,1307	0,1332	0,1358	0,1383	0,1408	0,1434	0,1459	0,1484
0,56	0,1510	0,1535	0,1560	0,1586	0,1611	0,1637	0,1662	0,1687	0,1713	0,1738
0,57	0,1764	0,1789	0,1815	0,1840	0,1866	0,1891	0,1917	0,1942	0,1968	0,1993
0,58	0,2019	0,2045	0,2070	0,2096	0,2121	0,2147	0,2173	0,2198	0,2224	0,2250
0,59	0,2275	0,2301	0,2327	0,2353	0,2379	0,2404	0,2430	0,2456	0,2482	0,2508
0,60	0,2534	0,2559	0,2585	0,2611	0,2637	0,2663	0,2689	0,2715	0,2741	0,2767
0,61	0,2793	0,2819	0,2845	0,2872	0,2898	0,2924	0,2950	0,2976	0,3002	0,3029
0,62	0,3055	0,3081	0,3107	0,3134	0,3160	0,3186	0,3213	0,3239	0,3266	0,3292
0,63	0,3319	0,3345	0,3372	0,3398	0,3425	0,3451	0,3478	0,3504	0,3531	0,3558
0,64	0,3585	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3745	0,3772	0,3799	0,3826
0,65	0,3853	0,3880	0,3907	0,3934	0,3961	0,3989	0,4016	0,4043	0,4070	0,4097
0,66	0,4125	0,4152	0,4179	0,4207	0,4234	0,4262	0,4289	0,4316	0,4344	0,4372
0,67	0,4399	0,4427	0,4454	0,4482	0,4510	0,4538	0,4565	0,4593	0,4621	0,4649
0,68	0,4677	0,4705	0,4733	0,4761	0,4789	0,4817	0,4845	0,4874	0,4902	0,4930
0,69	0,4959	0,4987	0,5015	0,5044	0,5072	0,5101	0,5129	0,5158	0,5187	0,5215
0,70	0,5244	0,5273	0,5302	0,5330	0,5359	0,5388	0,5417	0,5446	0,5476	0,5505
0,71	0,5534	0,5563	0,5592	0,5622	0,5651	0,5680	0,5710	0,5739	0,5769	0,5799
0,72	0,5828	0,5858	0,5888	0,5918	0,5948	0,5978	0,6008	0,6038	0,6068	0,6098
0,73	0,6128	0,6158	0,6189	0,6219	0,6250	0,6280	0,6311	0,6341	0,6372	0,6403
0,74	0,6434	0,6464	0,6495	0,6526	0,6557	0,6588	0,6620	0,6651	0,6682	0,6714
0,75	0,6745	0,6776	0,6808	0,6840	0,6871	0,6903	0,6935	0,6967	0,6999	0,7031
0,76	0,7063	0,7095	0,7127	0,7160	0,7192	0,7225	0,7257	0,7290	0,7323	0,7356
0,77	0,7389	0,7421	0,7454	0,7488	0,7521	0,7554	0,7587	0,7621	0,7655	0,7688
0,78	0,7722	0,7756	0,7790	0,7824	0,7858	0,7892	0,7926	0,7961	0,7995	0,8030
0,79	0,8064	0,8099	0,8134	0,8169	0,8204	0,8239	0,8274	0,8309	0,8345	0,8381
0,80	0,8416	0,8452	0,8488	0,8524	0,8560	0,8596	0,8632	0,8669	0,8706	0,8742
0,81	0,8779	0,8816	0,8853	0,8890	0,8927	0,8965	0,9002	0,9040	0,9078	0,9116
0,82	0,9154	0,9192	0,9230	0,9269	0,9307	0,9346	0,9385	0,9424	0,9463	0,9502
0,83	0,9542	0,9581	0,9621	0,9661	0,9701	0,9741	0,9782	0,9822	0,9863	0,9904
0,84	0,9945	0,9986	1,0027	1,0069	1,0110	1,0152	1,0194	1,0236	1,0279	1,0322
0,85	1,0364	1,0407	1,0451	1,0494	1,0537	1,0581	1,0625	1,0669	1,0714	1,0758
0,86	1,0803	1,0848	1,0894	1,0939	1,0985	1,1031	1,1077	1,1123	1,1170	1,1217
0,87	1,1264	1,1311	1,1359	1,1407	1,1455	1,1504	1,1552	1,1601	1,1651	1,1700
0,88	1,1750	1,1800	1,1850	1,1901	1,1952	1,2004	1,2055	1,2107	1,2160	1,2212
0,89	1,2265	1,2319	1,2372	1,2426	1,2481	1,2536	1,2591	1,2646	1,2702	1,2759
0,90	1,2816	1,2873	1,2930	1,2988	1,3047	1,3106	1,3165	1,3225	1,3285	1,3346
0,91	1,3408	1,3469	1,3532	1,3595	1,3658	1,3722	1,3787	1,3852	1,3917	1,3984
0,92	1,4051	1,4118	1,4187	1,4255	1,4325	1,4395	1,4466	1,4538	1,4611	1,4684
0,93	1,4758	1,4833	1,4909	1,4985	1,5063	1,5141	1,5220	1,5301	1,5382	1,5464
0,94	1,5548	1,5632	1,5718	1,5805	1,5893	1,5982	1,6073	1,6164	1,6258	1,6352
0,95	1,6449	1,6546	1,6646	1,6747	1,6850	1,6954	1,7060	1,7169	1,7279	1,7392
0,96	1,7507	1,7624	1,7744	1,7866	1,7991	1,8119	1,8250	1,8384	1,8522	1,8663
0,97	1,8808	1,8957	1,9110	1,9268	1,9431	1,9600	1,9774	1,9954	2,0141	2,0335
0,98	2,0537	2,0749	2,0969	2,1201	2,1444	2,1701	2,1973	2,2262	2,2571	2,2904
0,99	2,3264	2,3656	2,4089	2,4573	2,5121	2,5758	2,6521	2,7478	2,8782	3,0902

Note : Si $p < 0.5$**, alors il suffit d'utiliser cette relation**

$$P(Z < x) = p \Leftrightarrow P(Z < -x) = 1 - p$$