Examen

Durée : 1H et 30m

Exercice 01 : [06 pts]

I) Soient a un réel strictement positif et $I = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx$.

1. Montrer que $I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(ax^2+ay^2)} dx dy$.

2. En déduire la valeur de I .

II) Pour tout $x \geq 0$ on pose $F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t^2x}}{(t^2+1)} dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que F est une solution de l'équation différentielle $y - y' = \sqrt{\frac{\pi}{4x}}$ sur $]0, \infty[$.

Exercice 02 : [05 pts]

Soient $1 < p < \infty$ et $f \in L^{p'}(]0, 1[)$.

1. Montrer, pour tout $j \geq 1$, l'inégalité $\int_0^1 x^{\frac{j}{p}} |f(x)| dx \leq \frac{1}{(j+1)^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{p',]0, 1[}$.

2. En déduire que $\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^\infty \frac{x^{\frac{j}{p}}}{j} |f(x)| \right) dx < \infty$.

Exercice 03 : [04 pts]

1. Soit $j \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto (xy)^j$ est intégrable sur $]0, 1[\times]0, 1[$.

b. Calculer $\int_0^1 \int_0^1 (xy)^j dx dy$, $j \in \mathbb{N}$.

2. En déduire que $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^2}$.

Exercice 04 : [05 pts]

Soit $h \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $h, h' \in L_\infty(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) h'(jx) dx = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

2) En déduire que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) h'(jx) dx = 0, \forall f \in L_1(\mathbb{R}).$$

Correction de l'exercice 01 : [06 pts]

I) Soit $I = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$.

1. Montrer que $I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$. (2 pts)

On utilise que $I^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \right)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-ay^2} dy$. Par linéarité et indépendance des variables, on obtient :

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy.$$

Le résultat est démontré.

2. En déduire la valeur de I . (1 pt)

On passe en coordonnées polaires avec $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, ce qui donne $dx dy = r dr d\theta$. Ainsi :

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-ar^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-ar^2} r dr.$$

Avec le changement de variable $u = ar^2 \Rightarrow du = 2ar dr$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \frac{1}{2a}.$$

Donc $I^2 = \frac{\pi}{4a} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{4a}}$.

II) Pour tout $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x}}{(t^2 + 1)} dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et écrire $F'(x)$ sous forme intégrale. (2 pts)

• Pour tous $t \geq 0$ et $x \geq 0$ on a $\left| \frac{e^{-t^2 x}}{t^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{1 + t^2}$, donc la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t^2 x}}{t^2 + 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x > 0$ car $\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt < \infty$.

• Pour tous $t \geq 0$ et $x \geq a > 0$ on a $\left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-xt^2}}{t^2 + 1} \right| = \left| \frac{t^2 e^{-xt^2}}{t^2 + 1} \right| \leq e^{-at^2}$. La fonction $t \mapsto e^{-at^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Donc par le théorème de dérivation sous le signe intégral, F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{t^2 + 1} dt.$$

2. Montrer que F est une solution de l'équation $y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} x$ sur $]0, +\infty[$. (1 pt)

On pose $y(x) = F(x)$ alors :

$$y(x) - y'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4x}}.$$

Correction de l'exercice 02 : [05 pts]

Soient $1 < p < \infty$ et $f \in L^p(]0, 1[)$.

1. Montrer, pour tout $j \geq 1$, l'inégalité $\int_0^1 x^{\frac{j}{p}} |f(x)| dx \leq \frac{1}{(j+1)^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{p',]0, 1[}$. (2 pts)

Utilisons l'inégalité de Hölder avec :

$$\int_0^1 x^{\frac{j}{p}} |f(x)| dx \leq \left(\int_0^1 \left(x^{\frac{j}{p}}\right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p',]0, 1[}.$$

D'où l'inégalité demandée :

$$\int_0^1 x^{\frac{j}{p}} |f(x)| dx \leq \frac{1}{(j+1)^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{p',]0, 1[}.$$

2. En déduire que $\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{j}{p}}}{j} |f(x)| \right) dx < \infty$. (3 pts)

La suite $\frac{x^{\frac{j}{p}}}{j} |f(x)|$ est à termes positifs, alors

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{j}{p}}}{j} |f(x)| \right) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \int_0^1 x^{\frac{j}{p}} |f(x)| dx.$$

En utilisant le résultat précédent, on a :

$$\frac{1}{j} \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{j}{p}}}{j} |f(x)| \right) dx \leq \frac{1}{j(j+1)^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{p', (]0, 1[)}.$$

Ainsi :

$$\int_0^1 g(x) dx \leq \|f\|_{p',]0, 1[} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)^{\frac{1}{p}}}.$$

La série $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)^{\frac{1}{p}}}$ converge car elle est équivalente à la série de Riemann $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+1/p}}$. Par conséquent,

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{j}{p}}}{j} |f(x)| \right) dx < \infty.$$

Correction de l'exercice 03 : [04 pts]

1. Soit $j \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto (xy)^j$ est intégrable sur $]0, 1[\times]0, 1[$. (1 pt)

La fonction $(x, y) \mapsto (xy)^j$ est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$ et est donc mesurable. De plus, pour tout $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, on a $0 \leq (xy)^j \leq 1$. Par le théorème de domination, cette fonction est intégrable sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

b. Calculer $\int_0^1 \int_0^1 (xy)^j dx dy$, $j \in \mathbb{N}$. (1 pt)

On effectue d'abord l'intégration par rapport à x :

$$\int_0^1 \int_0^1 (xy)^j dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^j y^j dx \right) dy.$$

En intégrant par rapport à x :

$$\int_0^1 x^j dx = \frac{1}{j+1}.$$

Donc :

$$\int_0^1 \int_0^1 (xy)^j dx dy = \int_0^1 y^j \frac{1}{j+1} dy = \frac{1}{j+1} \int_0^1 y^j dy.$$

En intégrant par rapport à y , on a $\int_0^1 y^j dy = \frac{1}{j+1}$. Par conséquent :

$$\int_0^1 \int_0^1 (xy)^j dx dy = \frac{1}{(j+1)^2}.$$

2. En déduire que $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$. (2 pts)

On utilise le développement en série géométrique pour $\frac{1}{1-xy}$, valide pour $|xy| < 1$:

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{j=0}^{\infty} (xy)^j.$$

En intégrant terme par terme (ce qui est justifié par la positivité de termes de la suite $(xy)^j$ sur $[0, 1] \times [0, 1]$), on obtient :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^j dx dy.$$

D'après le résultat de la question 1.b, on sait que $\int_0^1 \int_0^1 (xy)^j dx dy = \frac{1}{(j+1)^2}$. En décalant l'indice j (en posant $k = j + 1$), on obtient :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}.$$

Correction de l'exercice 04 : [05 pts]

On pose $M = \|h\|_{1,\infty}$ et $M' = \|h'\|_{1,\infty}$

1) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, alors il existe $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = 0, \quad \forall x \notin [a, b]$.
 Ils existe $N, N' > 0$ tels que $|\varphi(x)| \leq N$ et $|\varphi'(x)| \leq N', \forall x \in [a, b]$. On a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)h'(jx)dx \right| &= \left| \int_a^b \varphi(x)h'(jx)dx \right| = \left| \left[\frac{1}{j} \varphi(x)h(jx) \right]_a^b - \frac{1}{j} \int_a^b \varphi'(x)h(jx)dx \right| \\ &\leq \left| \left[\frac{1}{j} \varphi(x)h(jx) \right]_a^b \right| + \left| \frac{1}{j} \int_a^b \varphi'(x)h(jx)dx \right| \\ &\leq \frac{2NM}{j} + \frac{N'M(b-a)}{j}, \end{aligned}$$

par passage à la limite on trouve $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)h'(jx)dx = 0$.

2) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, par densité de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L_1(\mathbb{R})$ il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_{1, \mathbb{R}} < \varepsilon/(2M')$.

D'après 1), $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)h'(jx)dx = 0$, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $j > N_0$ on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)h'(jx)dx \right| < \varepsilon/2.$$

Pour $j > N_0$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)h'(jx)dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \left((f(x) - \varphi(x))h'(jx) + \varphi(x)h'(jx) \right) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |(f(x) - \varphi(x))h'(jx)| dx + \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)h'(jx)dx \right| \\ &\leq M' \int_{\mathbb{R}} |f(x) - \varphi(x)| dx + \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)h'(jx)dx \right| \\ &= M'\|f - \varphi\|_{1, \mathbb{R}} + \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)h'(jx)dx \right| \\ &\leq M'\varepsilon/(2M') + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)h'(jx)dx = 0$.