Solution de l'examen de Modélisation Numérique

MASTER 1 Physique Appliquée

Exercice 1 : Méthode de Newton-Raphson 5pts

On considère la fonction

$$f(x) = e^x - 3x,$$

avec dérivée

$$f'^x - 3.$$

La formule itérative de Newton-Raphson est

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

1. Approximation en trois itérations (avec $x_0 = 1$)

— **Itération 0 :** $x_0 = 1$.

— **Itération 1 :**

$$f(1) = e - 3, \quad f'(1) = e - 3 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1 - \frac{e-3}{e-3} = 0.$$

— **Itération 2 :**

$$f(0) = e^0 - 0 = 1, \quad f'(0) = 1 - 3 = -2, \quad x_2 = 0 - \frac{1}{-2} = 0.5.$$

— **Itération 3 :**

$$f(0.5) = e^{0.5} - 3(0.5) \approx 1.64872 - 1.5 = 0.14872,$$
$$f'^{0.5} - 3 \approx 1.64872 - 3 = -1.35128,$$

donc

$$x_3 = 0.5 - \frac{0.14872}{-1.35128} \approx 0.5 + 0.11017 \approx 0.61017.$$

Ainsi, après trois itérations, l'approximation obtenue est

$$\boxed{x_3 \approx 0.61017.}$$

2. Nombre d'itérations pour obtenir $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$

En prolongeant la méthode, on obtient la suite (valeurs approchées) :

$$\begin{aligned}
&x_0 = 1, && |x_1 - x_0| = 1,\\
&x_1 = 0, && |x_2 - x_1| = 0.5,\\
&x_2 = 0.5, && |x_3 - x_2| \approx 0.11017,\\
&x_3 \approx 0.61017, && |x_4 - x_3| \approx 0.00900,\\
&x_4 \approx 0.61915, && |x_5 - x_4| \approx 0.00072,\\
&x_5 \approx 0.61843, && |x_6 - x_5| \approx 0.00009,\\
&x_6 \approx 0.61833, && |x_7 - x_6| \approx 0.00003,\\
&x_7 \approx 0.61836, && |x_8 - x_7| < 10^{-6}.
\end{aligned}$$

On constate que le critère $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$ est atteint environ à la **8ème itération**.

Exercice 2 : Résolution d'un système linéaire par LLT

On considère le système

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 14, \\ 2x + 5y + 3z = 21, \\ 2x + 3y + 6z = 26. \end{cases}$$

1. Applicabilité de la méthode de Cholesky 5pts

La méthode de Cholesky s'applique si la matrice des coefficients est symétrique et définie positive. Ici,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

qui est symétrique. Les mineurs principaux sont :

$$\det(4) = 4 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 16 > 0,$$

et

$$\det(A) = 64 > 0.$$

Ainsi, A est définie positive et la méthode de Cholesky est applicable.

2. Résolution par factorisation LLT

On cherche une matrice triangulaire inférieure L telle que

$$A = L\,L^T, \quad \text{où } L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}.$$

On calcule :

- $l_{11}^2 = 4 \implies l_{11} = 2.$
- $l_{21} = \dfrac{A_{21}}{l_{11}} = \dfrac{2}{2} = 1.$
- $l_{31} = \dfrac{A_{31}}{l_{11}} = \dfrac{2}{2} = 1.$
- $l_{22}^2 = A_{22} - l_{21}^2 = 5 - 1 = 4 \implies l_{22} = 2.$
- $l_{32} = \dfrac{A_{32} - l_{21}l_{31}}{l_{22}} = \dfrac{3 - 1 \cdot 1}{2} = 1.$
- $l_{33}^2 = A_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2) = 6 - (1 + 1) = 4 \implies l_{33} = 2.$

Ainsi,

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, avec $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \\ 26 \end{pmatrix}$, on procède en deux étapes :

(i) Résolution de $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$:

$$\begin{cases} 2y_1 = 14 \quad \Longrightarrow \quad y_1 = 7, \\ y_1 + 2y_2 = 21 \quad \Longrightarrow \quad 7 + 2y_2 = 21 \quad \Longrightarrow \quad y_2 = 7, \\ y_1 + y_2 + 2y_3 = 26 \quad \Longrightarrow \quad 7 + 7 + 2y_3 = 26 \quad \Longrightarrow \quad y_3 = 6. \end{cases}$$

(ii) Résolution de $L^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$: On a

$$L^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_3 = 6 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 3. \end{cases}$$

De la deuxième équation :

$$2x_2 + 3 = 7 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 2.$$

Puis, la première :

$$2x_1 + 2 + 3 = 7 \quad \Longrightarrow \quad 2x_1 = 2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1.$$

La solution du système est donc :

$$\boxed{x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.}$$

Exercice 3 : Interpolation Polynomiale.....5pts

On considère les points :

$$(1, \tfrac{3}{2}), \quad (2, \tfrac{5}{2}), \quad (3, \tfrac{7}{2}), \quad (4, \tfrac{11}{2}).$$

1. Existence de l'interpolation polynomiale

Comme les abscisses sont distinctes, il existe un unique polynôme de degré au plus 3 passant par ces points. La fonction admet donc une interpolation polynomiale.

2. Polynôme d'interpolation de Lagrange

La formule du polynôme d'interpolation de Lagrange est

$$P(x) = \sum_{i=1}^{4} y_i \, L_i(x),$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Les fonctions de base sont :

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{-6}, \\
L_2(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{2}, \\
L_3(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} = -\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{2}, \\
L_4(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}.
\end{aligned}$$

Le polynôme s'écrit alors :

$$P(x) = \frac{3}{2}\, L_1(x) + \frac{5}{2}\, L_2(x) + \frac{7}{2}\, L_3(x) + \frac{11}{2}\, L_4(x).$$

Après simplification (par exemple par la méthode des différences divisées), on trouve la forme suivante :

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{17}{6}x - \frac{1}{2}.}$$

On vérifie aisément que :

$$P(1) = \tfrac{3}{2}, \quad P(2) = \tfrac{5}{2}, \quad P(3) = \tfrac{7}{2}, \quad P(4) = \tfrac{11}{2}.$$

Exercice 4 : Localisation et détermination des solutions

On étudie l'équation

$$P_3(x) = 3x^3 + 4x^2 + 3x - 10 = 0.$$

1. Localisation des solutions réelles voir cours

2. Nombre de solutions réelles voir cours methode de Sturm

Conclusion : L'équation admet une unique solution réelle :

$$\boxed{x = 1.}$$