

Examen Janvier 2025

Exercice 1(4 pts). Soient E un espace normé, N_1 et N_2 deux normes définies sur E . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- i. N_1 et N_2 sont équivalentes.
- ii. $(E; N_1)$ est complet si et seulement si $(E; N_2)$ est complet .

Exercice 2(6 pts). Soient $(H; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $T : H \rightarrow H$ une application satisfaisant $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle; \forall (x, y) \in H^2$.

1. Montrer que T est linéaire et continue.
2. Montrer que $\text{Ker}T \equiv \text{Im}T^\perp$.
3. Montrer que $H = \text{Ker}T \oplus \overline{\text{Im}T}$.

Exercice 3(10 pts). Soient $(H; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, et $\phi \in H^*$.

1. Montrer que $\forall x \in H, \exists y_\phi \in H : \phi(x) = \langle x, y_\phi \rangle$ et $\|\phi\|_{H^*} = \|y_\phi\|$.

2. Soit F un sous-espace fermé de H , non réduit à $\{0\}$. On note p_F la projection orthogonale de H sur F .

Montrer que $\forall x \in H, \inf_y \{\|x - y\|; y \in F\}$ est atteint en $y = p_F(x)$.

3. On suppose désormais que $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Pour n un entier fixé,

3.1. on définit ϕ par

$$\forall x \in H, \phi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{i},$$

montrer que ϕ est continue et calculer $\|\phi\|_{H^*}$ de deux façons différentes.

3.2. On pose

$$M = \{x \in H; \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{i} = 0.\}$$

Montrer que M admet un supplémentaire fermé à déterminer.

3.3. Donner la distance de l'élément $(1, 1, 0, \dots, 0)$ à M .

Ex 1 (2) $\Rightarrow$ ii? $N_1 \approx N_2$ ssc $\exists \alpha, \beta > 0 : \forall x \in E, \alpha \|x\| \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x)$ 0,25 ①
 Soit (E, N_1) est complet, alors $\forall (x_n) \subset E$ de Cauchy, $\exists x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} N_1(x_n - x) = 0$ 0,5
 soit $(x_n) \subset (E, N_2)$ de Cauchy d'après ① $(x_n) \subset (E, N_1)$ est de Cauchy (q.m. est complet)
 $\Rightarrow \exists x \in (E, N_1) : \lim_{n \rightarrow \infty} N_1(x_n - x) = 0$. D'après ① $\lim_{n \rightarrow \infty} N_2(x_n - x) = 0$ 0,5 x2
 (E, N_2) est complet, pour $x \neq y \in \{x, y\}$ 0,25

(2) ii si?

$\forall x \in (E, N_1)$, on considère la suite constante $x_n = x$ q.m. est convergente, dans
 (E, N_2) , donc elle est bornée, i.e. $\exists \beta > 0 : \frac{N_1(x)}{N_2(x)} \leq \beta \Leftrightarrow N_1(x) \leq \beta N_2(x)$ ①
 Démontrons pour $x \in (E, N_1) \Rightarrow \exists \alpha > 0 : \frac{N_1(x)}{N_2(x)} \leq \alpha \Leftrightarrow N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$ ②
 D'après ① et ② on obtient $\forall x \in E : N_1(x) \leq \alpha_1 \|x\| \leq \beta N_2(x)$ 0,25

Ex 2. H est un Hilbert, donc $\forall x \in H, x$ admet un système orthonormal de nombreable
 donc T est continue ssc T est localement continue i.e. 0,5

1° Soit $x_n \xrightarrow{H} x \Rightarrow T x_n \xrightarrow{H} T x$ 0,5
 soit $x_n \xrightarrow{H} x \Rightarrow \langle T x_n, y \rangle = \langle x_n, T y \rangle \xrightarrow{0,5} \langle x, T y \rangle = \langle T x, y \rangle \forall y \in H$
 i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T x_n - T x, y \rangle = \langle T x_n - T x, y \rangle = 0 \forall y \in H \Rightarrow T x_n = T x$ 0,5
 2° Soit $x \in \text{Ker } T \Rightarrow T x = 0 \Rightarrow \langle T x, y \rangle = \langle x, T y \rangle = 0 \Rightarrow x \in (\text{Im } T)^\perp \Rightarrow \text{Ker } T \subset (\text{Im } T)^\perp$ 0,5
 Soit $x \in (\text{Im } T)^\perp \Rightarrow \langle x, T y \rangle = 0 \forall y \in H \Rightarrow \langle T x, y \rangle = 0 \forall y \in H \Rightarrow T x = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } T$ 0,5
 d'après ① et ② on obtient $\text{Ker } T = (\text{Im } T)^\perp$ ①

3° Comme T est continue $\Rightarrow \text{Ker } T$ est fermé (s.e.v.) de H qui est Hilbert, donc il
 admet un supplémentaire fermé $\text{Ker } T^\perp$, $H = \text{Ker } T \oplus \text{Ker } T^\perp$
 D'après 2° : $\text{Ker } T^\perp = (\text{Im } T)^\perp \Rightarrow H = \text{Ker } T \oplus (\text{Im } T)^\perp$ ①
 Donc il suffit de montrer que $(\text{Im } T)^\perp = \overline{(\text{Im } T)}$.

l'accepté ① ou ②.

① Soit on ait d'après la proposition 3.6.2 ci-dessus.
 ② Soit on écrit les énoncés de cette proposition

③

④ L'preuve comme suit, $(\text{Im } T \text{ est s.e.v. de } H) \Leftrightarrow (F = \text{Im } T)$.

1° Soit $x \in \text{Im } T \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \forall y \in \text{Im } T^\perp \Rightarrow x \in (\text{Im } T^\perp)^\perp = \text{Im } T \subset (\text{Im } T)^\perp$ 0,5
 donc $\text{Im } T \subset (\text{Im } T^\perp)^\perp = (\text{Im } T)^\perp$ (car $A^\perp$ est s.e.v. fermé $\forall A \subset H$) 0,5

2° Soit $x \in (\text{Im } T)^\perp \Rightarrow \exists z \in F = \overline{F}$ et $y \in F^\perp$, $x = y + z$ 0,5

d'où on a $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle + \langle z, z \rangle$ 0,5

Donc $\langle z, z \rangle = 0 \Rightarrow z = 0$ 0,5 $\Rightarrow x = y \in F^\perp \Rightarrow (\text{Im } T)^\perp \subset \text{Im } T$ 0,5

D'après 1° et 2° de ④ on obtient $\text{Im } T = (\text{Ker } T^\perp)^\perp$ 0,5

Donc $H = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$ 0,25

1. H^* := l'ensemble des formes linéaires continues. $\Phi \in H^* \Rightarrow \text{Ker } \Phi$ est fermée. Comme H est un Hilbert $\Rightarrow \exists$ un supplémentaire de $\text{Ker } \Phi$:

$$H = \text{Ker } \Phi \oplus \text{Ker } \Phi^\perp \quad 0,60$$

Soit $b \in \text{Ker } \Phi^\perp$: $\Phi(b) = 1$ 0,25

Alors $\forall x \in H$ on a : $x = \underbrace{x - \Phi(x)b}_{\in \text{Ker } \Phi} + \underbrace{\Phi(x)b}_{\in \text{Ker } \Phi^\perp} = x_1 + x_2$: $x_1 \perp x_2$ 0,5

2,5 Donc $\langle x, b \rangle = \Phi(x) \langle b, b \rangle \Rightarrow \Phi(x) = \langle x, \frac{b}{\|b\|^2} \rangle \Rightarrow \exists y = \frac{b}{\|b\|^2}$ 0,25 x 2

• Comme $\Phi(x) = \langle x, y \rangle \Rightarrow \|\Phi\|_{H^*} := \sup_{\|x\| \leq 1} |\Phi(x)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (d'après $\leq$ de Schwarz)

• D'autre part on a :

$$\Phi(y) = \|y\|^2 \Rightarrow \|\Phi\|_{H^*} \geq \sup_{\|y\| \neq 0} \frac{|\Phi(y)|}{\|y\|} = \|y\| \quad 0,60 \quad \text{--- ②}$$

d'après ② et ③ on obtient $\|\Phi\|_{H^*} = \|y\|$ 0,25

2,5 2° Comme F est un s.e.v. fermé de H (Hilbert) $\Rightarrow H = F \oplus F^\perp$ c.e. $\forall x \in H$ on a :

$$x = x_F + P_F(x) = x - P_F(x) + P_F(x) : x_F \in F^\perp \text{ et } x_F \perp P_F(x) \quad 0,5$$

• Comme $P_F(x) \in F \Rightarrow \inf_{y \in F} \|x - y\| \leq \|x - P_F(x)\|$ --- ①' 0,60

• D'autre part on a :

$$\forall x \in H, \forall y \in F \text{ on a } \|x - y\|^2 = \|P_F(x) - y + x_F\|^2 = \|P_F(x) - y\|^2 + \|x_F\|^2 \quad 0,50$$

Donc $\|x - P_F(x)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad \forall y \in F$ et par suite $\|x - P_F(x)\| \leq \inf_{y \in F} \|x - y\|$ --- ②

d'après ①' et ② on obtient $\inf_{y \in F} \|x - y\| = d(x, F) = \|x - P_F(x)\|$ 0,50

(6) 3° 1° d'après $\leq$ de Schwarz on a : $|\Phi(x)| \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2})^{\frac{1}{2}} \leq c \|x\|_2$ --- ③ 0,5

a. D'autre part on a : $\|\Phi\|_{H^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\Phi(x)| \leq c$: $\|x\| \leq 1$ --- ④ 0,25

D'autre part on a : $\Phi(x_0) = c$: $x_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots, 0)$ 0,5

et donc $\|\Phi\|_{H^*} \geq \sup_{\|x\| \leq 1} |\Phi(x)| = c$ --- ⑤ 0,6

④ et ⑤ $\Rightarrow \|\Phi\|_{H^*} = c$ 0,25

(3) b. D'après 1° qui est le Th^2 on a une Riesz : il est clair que $y_\Phi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots, 0)$

$$\text{Donc } \Phi(x) = \langle x, y_\Phi \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{i} \quad 0,50$$

$$\text{Donc } \|\Phi\|_{H^*} = \|y_\Phi\| = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \right)^{\frac{1}{2}} = c \quad 0,25$$

① 3° 2. $\Pi = \text{Ker } \Phi$ est fermé car $\Phi \in H^*$, donc il admet un supplémentaire $\text{Ker } \Phi^\perp$

eq : $d \perp \text{Ker } \Phi^\perp = 1 \Rightarrow \text{Ker } \Phi^\perp = \sum y_\Phi$: $y_\Phi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots, 0)$: $\Phi(y_\Phi) > 0$ 0,25

② 3° 3. Comme $H = \text{Ker } \Phi + \sum y_\Phi$ $\Rightarrow \forall x \in H$: $x = P_F(x) + d y_\Phi$: $y_\Phi \perp P_F(x)$ 0,5

donc $\langle x_0, y_\Phi \rangle = d \|y_\Phi\|^2 \Rightarrow d = \frac{1}{\|y_\Phi\|^2} (1 + \frac{1}{2})$: $x_0 = (1, 1, 0, \dots, 0)$ 0,25

D'après 2° on a $d(x_0, F) = \|x_0 - P_F(x_0)\| = \|d y_\Phi\| = \frac{3}{2} \frac{\|y_\Phi\|}{\|y_\Phi\|^2} = \frac{3}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$ 0,25