

Correction de l'Examen : Méthodes Numériques Appliquées

Master 2 Physique des Matériaux

Université Larbi Ben M'hidi, Oum El Bouaghi

Exercice 1 : Méthode de Newton-Raphson

On considère la fonction :

$$f(x) = x^3 - 4x - 9 \quad (1)$$

Avec $x_0 = 2$, on applique la méthode de Newton-Raphson :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \dots\dots\dots 2pts \quad (2)$$

Calculs des trois itérations :

$$x_1 = 2 - \frac{2^3 - 4(2) - 9}{3(2)^2 - 4} = 2.2 \dots\dots\dots 1pts$$

$$x_2 = 2.2 - \frac{2.2^3 - 4(2.2) - 9}{3(2.2)^2 - 4} \approx 2.094 \dots\dots\dots 1pts$$

$$x_3 = 2.094 - \frac{2.094^3 - 4(2.094) - 9}{3(2.094)^2 - 4} \approx 2.081 \dots\dots\dots 1pts$$

Exercice 2 : Méthode de la Sécante

On applique la formule :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \dots\dots\dots 2pts \quad (3)$$

Avec $x_0 = 0.5$, $x_1 = 0.6$ et $f(x) = \cos(x) - x$:

$$x_2 = 0.6 - \frac{(\cos(0.6) - 0.6)(0.6 - 0.5)}{\cos(0.6) - 0.6 - (\cos(0.5) - 0.5)} \approx 0.6929 \dots\dots\dots 1, 5pts$$

$$x_3 = 0.6929 - \frac{(\cos(0.6929) - 0.6929)(0.6929 - 0.6)}{\cos(0.6929) - 0.6929 - (\cos(0.6) - 0.6)} \approx 0.7366 \dots\dots\dots 1, 5pts$$

Exercice 3 : Interpolation Polynomiale

Les points sont $(1, \frac{1}{2})$, $(2, \frac{5}{2})$, $(3, \frac{7}{2})$, $(4, \frac{9}{2})$.

1. Polynôme d'interpolation de Lagrange

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) \dots \dots \dots 2, 5pts \quad (4)$$

Où $L_i(x)$ sont les polynômes de Lagrange.

2. Polynôme d'interpolation de Newton

La table des différences finies donne :

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots 2.5pts \quad (5)$$

Les coefficients a_i sont obtenus par les différences finies.

Exercice 4 : Méthode de Sturm

L'équation donnée est :

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad (6)$$

Localisation des solutions est

$$T = 1 + \frac{1}{a_0} \max_{i=1,n} |a_i| = 7 \dots \dots \dots 0.5pts$$

$$[-T, T] = [-7, 7] \dots \dots \dots 0.5pts$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0(x) = P_3(x) \\ S_1(x) = P'_3(x) \\ S_2(x) = -rest \left\{ \frac{S_0(x)}{S_1(x)} \right\} \dots \dots \dots 2pts \\ S_3(x) = -rest \left\{ \frac{S_1(x)}{S_2(x)} \right\} \end{array} \right.$$

Le polynôme $P_3(x) = 0$ a trois solutions réelles distinctes $\dots \dots \dots 2pts$

L'application du théorème de Sturm permet de localiser les racines réelles.